

通用和修正 D-H 法在运动学建模中的应用分析^①

吕永军^{1,2}, 刘 峰^{2,3}, 郑颺默^{2,3}, 孙一兰³

¹(中国科学院大学, 北京 100049)

²(中国科学院大学 沈阳计算技术研究所, 沈阳 110171)

³(沈阳高精数控技术有限公司, 沈阳 110171)

摘 要: 通用 D-H 法在机器人运动学标准建模中虽然已被广泛研究和应用, 但其存在一个根本缺陷就是, 对于两个相邻的平行关节, 通用 D-H 法得到的齐次变换矩阵将是一个奇异矩阵, 不能得到正确的模型, 这样便无法对这部分关节运动进行正确的运动分析. 而修正的 D-H 法是正对通用 D-H 所存在的缺陷进行了改进, 保证了模型准确性. 本文研究了通用的运动学建模方法 D-H 法和该方法的应用缺陷, 以及修正的 D-H 法对通用 D-H 法存在的缺陷进行的改进, 并对修正的 D-H 法在自由度串联机器人正逆运动学中建立模型的正确性进行了验证.

关键词: 模型; D-H 法; 修正 D-H 法; 运动学

Application Analysis of Generalized and Modified D-H Method in Kinematic Modeling

LV Yong-Jun^{1,2}, LIU Feng^{2,3}, ZHENG Liao-Mo^{2,3}, SUN Yi-Lan³

¹(China University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

²(Shenyang Institute of Computing Technology, University of Chinese Academy of Sciences, Shenyang 100171, China)

³(University of Chinese Academy of Sciences, Shenyang 100171, China)

Abstract: Generalized D-H method has been widely researched and applied in robot kinematics modeling, but there is a fundamental flaw, which is that the homogeneous transformation matrix obtained by generalized D-H method is a singular matrix, so the model we get is also incorrect, and we cannot analyze correctly. The modified D-H method is improved to avoid the defects of generalized D-H, and to ensure the accuracy of the models. In this paper, the general kinematic modeling method and the application of the D-H method and its' defects and the modified D-H method are studied. At last, the correctness of kinematic model established by the modified D-H method in 6-DOF robot is verified.

Key words: model; D-H method; modified D-H method; kinematics

要对机器人进行研究首先建立正确的运动学运动学模型是非常必要的. 为解决两相连且可相互运动连杆间坐标转换问题, Denavit 和 Hartenberg 在 1995 年提出一种建模方法, 即 D-H 法^[1]. 近年来 D-H 法被研究者进行了大量的理论研究^[1-3]并获得许多技术成果, 已广泛应用于机械手臂运动或控制理论中. 如 Paul 等^[4]研究了 D-H 矩阵应用于机器人时存在的退化问题; 哈乐等^[5]利用 D-H 法对微创手术机器人进行了研究, 对研究外科微创手术机器人工作性能具有重要意义; 梁安阳等^[6]对移动喷漆机器人运动学进行了分析.

D-H 法通过四个参数, 即连杆长度 L_i 、连杆偏移 d_i 、扭转角 α_i 、关节角 θ_i , 经过两次平移和两次旋转从而建立相邻连杆的齐次变换矩阵. 这种四参数 D-H 法虽然已广泛应用, 但是人们研究发现其仍然是存在缺陷的. 例如, 在加工或安装精度不足时, 会导致相邻平行关节接近平行有一定偏角, 当针对平行关节 $i-1$ 和 i 建立坐标系进行坐标变换时, 按照 D-H 法, 将关节 $i-1$ 经过两次平移和两次旋转根本无法变换到关节 i 位置, 而需要再进行一次绕 Y 轴的旋转变换才能达到关节 i 位置. 所以, 在平行关节情形下, 四参数 D-H 法就

① 基金项目: “国科控股技术创新引导基金”项目—数控机床用机器人研发及产业化

收稿时间:2015-08-17;收到修改稿时间:2015-10-14

会失效,不再适合对该部分关节进行建模.为解决在平行关节四参数 D-H 失效问题,针对其产生根本原因,在对平行关节进行坐标变换时增加一个关于 Y 轴的旋转变换,从而得到正确的变换模型,这既是所谓的修正 D-H 法. 本文将对通用 D-H 法和改进的修正 D-H 法进行分析,并对改进的修正 D-H 法进行实际应用验证.

1 连杆坐标系建立

首先确定连杆参数: θ_i 为关节变量,表示关节轴线 Z_i 相邻两条公垂线夹角; l_i 为连杆长度,表示关节轴线 Z_{i-1} 和 Z_i 的公垂线距离; d_i 连杆偏移量,表示关节轴线 Z_i 相邻两条公垂线的距离; α_i 为绕 X 轴扭转角.

建立连杆坐标系,首先要选定坐标系的原点 O_i ,然后选择 Z_i 和 X_i 轴最后根据右手定则确定 Y_i 轴. 根据原点选取有两种建立方法:前置法和后置法. 这里采用前置法建立连杆坐标系,即原点 O_i 在关节轴线 Z_{i-1} 上. 建立连杆坐标系,如图 1.

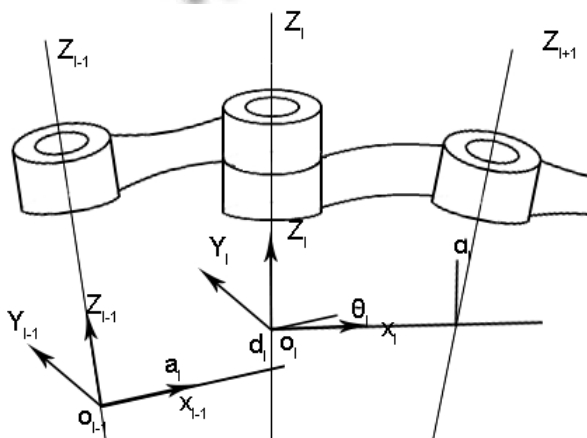


图 1 通用 D-H 法建立的连杆坐标系

2 运动学方程建立

首先利用 1 建立的连杆坐标系,求得相邻连杆间的连杆变换矩阵. 如连杆 i 相对于连杆 $i-1$ 的变换,即绕 Z_{i-1} 轴旋转 θ_i 角,使 X'_{i-1} 轴与 X_i 轴同向;再沿 Z'_{i-1} 平移 L_i 距离,使 O_{i-1} 移动到关节轴线 Z_i 与 Z_{i+1} 的公垂线与 Z_i 的交点;再沿 X'_{i-1} 平移 L_i 距离,使新的 O_{i-1} 移动到 O_i ;最后绕 X_i 旋转 α_i ,使新的 Z_{i-1} 轴与 Z_i 轴同向,即可得杆 i 相对杆 $i-1$ 的齐次变换关系矩阵为(为便于表示,将表 1 中参数已代入式中):

$$A_i = Rot(Z_{i-1}, \theta_i) Trans(0, 0, d_i) Trans(L_i, 0, 0) Rot(X_i, \alpha_i)$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & L_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & L_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中 $c \theta_i$ 表示 $\cos \theta_i$, $s \theta_i$ 表示 $\sin \theta_i$, 以此类推.

表 1 D-H 参数表

关节	$\theta(^{\circ})$	$d(\text{mm})$	$L(\text{mm})$	$\alpha(^{\circ})$	$\beta(^{\circ})$	范围($^{\circ}$)
1	0	0	L1	-90	0	-170--+170
2	-90	0	L2	180	0	-180--+65
3	0	0	L3	-90	β	-170--+190
4	0	-L4	0	90	0	-180--+180
5	0	0	0	-90	0	-135--+135
6	0	-L6	0	180	0	-360--+360

机器人末端相对于连杆 $i-1$ 坐标系的位置和姿态为:

$${}^{i-1}T_n = A_i A_{i+1} \dots A_n$$

用 P 表示手臂末端的位置矢量, R 表示手臂末端的方位,通过各连杆齐次变换矩阵组合,则可得手臂末端相对于基坐标系的位姿矩阵:

$${}^0T_n = \begin{bmatrix} {}^0R & {}^0P_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A_1 A_2 \dots A_n \quad (2)$$

由上的机器人末端位姿矩阵表达式,显然可知,一旦确定机器人各关节坐标,那么机器人的末端位姿也就随之确定. 故根据机器人关节空间坐标求解末端位姿矩阵即确定正向运动学的解.

3 通用D-H法缺陷分析

小节 2 中得到相邻两连杆的齐次变换矩阵,

$${}^{i-1}T_i = A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & L_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & L_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

d_i 表示关节轴线 Z_i 相邻两条公垂线的距离,当两相邻关节轴线平行时,这个距离 d_i 趋于零. 此时对(3)式求矩阵的秩 R ,将得到秩 $R < 4$,秩降低,矩阵不可逆. 故此时将无法得到正确的运动学模型.

4 修正D-H引入

首先针对两相邻的平行关节也建立一个连杆坐标

系,如图2.

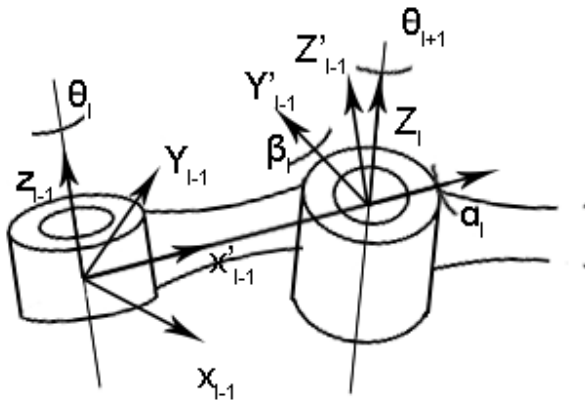


图2 两平行关节的连杆坐标系

对于两平行关节,其 d_i 为零,故同通用 D-H 的连杆变换步骤经过一次平移和两次变换后得到:

$${}^{i-1}T'_i = A'_i = Rot(Z_{i-1}, \theta_i) Trans(0, 0, d_i) Trans(L_i, 0, 0) Rot(X_i, \alpha_i)$$

此时,并不能使得新的 Z_{i-1} 轴与 Z_i 轴同向,而是沿 Y 轴方向有一定偏角 β_i .故此时还需要给予沿 Y 轴一个旋转变换,再次的变换矩阵:

$${}^{i-1}T_i = A_i = Rot(Z_{i-1}, \theta_i) Trans(L_i, 0, 0) Rot(X_i, \alpha_i) Rot(Y_i, \beta_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i c\beta_i - s\theta_i s\alpha_i s\beta_i & -s\theta_i c\alpha_i & c\theta_i s\beta_i - s\theta_i s\alpha_i c\beta_i & L_i c\theta_i \\ s\theta_i c\beta_i - c\theta_i s\alpha_i s\beta_i & c\theta_i s\alpha_i & s\theta_i s\beta_i - c\theta_i s\alpha_i c\beta_i & L_i s\theta_i \\ -c\alpha_i s\beta_i & s\alpha_i & c\alpha_i c\beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

此时才真正得到杆 i 相对杆 $i-1$ 的齐次变换关系矩阵,得到正确的模型.

故修正 D-H 法,在当两个关节平行时引入关于 Y 轴的旋转角,且此时 d_i 为零,即三次旋转一次平移变换;对于不平行两相邻关节则并不考虑关于 Y 轴的旋转变换(β_i 为零),即两次旋转两次平移变换.

5 修正D-H的实际应用

5.1 正逆运动学求解

通过(1)式,得六关节串联机器人的末端位姿矩阵为:

$${}^0T = A_1 A_2 \dots A_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

得末端位置矩阵为: $[p_x \ p_y \ p_z]^T$

姿态矩阵为:

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix}$$

对于机器人末端位姿的描述如(5)式所示.可知对于任何一组关节坐标,都有确定的末端位姿与之对应,但是不用的两组关节坐标可能导致相同的末端位姿.所以由关节空间到末端笛卡尔空间是一种单映射关系,即正向运动学求解较为简单,只要知道个关节坐标即可由公式(5)求得机器人末端位姿.

相反由末端空间到关节空间却是一种多映射关系.逆运动学就是根据已知的机器人手臂末端位姿,来求解各关节变量.故而,逆向运动学求解并不像正向运动学那么简单,存在多个解,需要对这多个解进行判断取符合要求的作为逆运动学的解.用于逆运动学的求解方法很多^[7-10],没有所谓通用算法,为避免大量矩阵相乘等繁琐运算,

这里对末端位姿矩阵表达式进行变换,即用 $A_1 A_2$ 的逆、 A_6 的逆分别左乘和右乘(5)式得:

$$(A_1 A_2)^{-1} T_6^{-1} = A_3 A_4 A_5 \quad (6)$$

为便于表示,设

$$(A_1 A_2)^{-1} T_6^{-1} = \begin{bmatrix} n'_x & o'_x & a'_x & p'_x \\ n'_y & o'_y & a'_y & p'_y \\ n'_z & o'_z & a'_z & p'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

对(7)式左边进行计算可得右边相应变量表示为:

$$\begin{aligned} n'_x &= C_6(C_1 C_2 n_x - S_2 n_z + C_2 S_1 n_y) + S_6(C_1 C_2 o_x - S_2 o_z + C_2 S_1 o_y) \\ o'_x &= S_6(C_1 C_2 n_x - S_2 n_z + C_2 S_1 n_y) - C_6(C_1 C_2 o_x - S_2 o_z + C_2 S_1 o_y) \\ a'_x &= S_2 a_z - C_1 C_2 a_x - C_2 S_1 a_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_x &= C_1 C_2 p_x - C_2 L_1 - S_2 p_z - L_6 (C_1 C_2 a_x - S_2 a_z + \\
 &C_2 S_1 a_y) - L_2 + C_2 S_1 p_y \\
 \dot{n}_y &= C_6 (C_2 n_z - C_1 S_2 n_x + S_1 S_2 n_y) + S_6 (C_2 o_z + \\
 &C_1 S_2 o_x + S_1 S_2 o_y) \\
 \dot{o}_y &= S_6 (C_2 n_z - C_1 S_2 n_x + S_1 S_2 n_y) - C_6 (C_2 o_z + \\
 &C_1 S_2 o_x + S_1 S_2 o_y) \\
 \dot{a}_y &= -C_2 a_z - C_1 S_2 a_x - S_1 S_2 a_y \\
 \dot{p}_y &= C_2 p_z - L_1 S_2 - L_6 (C_2 a_z + C_1 S_2 a_x + S_1 S_2 a_y) \\
 &+ C_1 S_2 p_x + S_1 S_2 p_y \\
 \dot{n}_z &= -C_6 (C_1 n_y - S_1 n_x) - S_6 (C_1 o_y - S_1 o_x) \\
 \dot{o}_z &= C_6 (C_1 o_y - S_1 o_x) - S_6 (C_1 n_y - S_1 n_x) \\
 \dot{a}_z &= C_1 a_y - S_1 a_x \\
 \dot{p}_z &= L_6 (C_1 a_y - S_1 a_x) - C_1 p_y + S_1 p_x
 \end{aligned}$$

同样, 令(6)式为,

$$A_3 A_4 A_5 = \begin{bmatrix} n''_x & o''_x & a''_x & p''_x \\ n''_y & o''_y & a''_y & p''_y \\ n''_z & o''_z & a''_z & p''_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

将 3、4、5 连杆变换矩阵相乘, 求得对应各项 n''、o''、a''、p'' 的表达式。

1) 求解关节角 θ_1 , 令(7)式和(8)式的第三行第四列相等, 得 $L_6(C_1 a_y - S_1 a_x) - C_1 p_y + S_1 p_x = 0$ 求得 $\theta_1 = \text{atan2}(-a_y L_6 + p_y, -a_x L_6 + p_x)$

2) 求解关节角 θ_2 , 令(7)式和(8)式的第一行第四列、第二行第四列相等, 且令

$$n = (a_z L_6 - p_z), m = L_1 + (a_x L_6 - p_x) C_1 + S_1 a_y L_6 - S_1 p_y$$

则可得,

$$\begin{aligned}
 n S_2 - m C_2 - L_2 &= C_3 L_3 - L_4 (C_3 S_\beta - C_\beta S_3) \\
 -n C_2 - m S_2 &= S_3 L_3 - L_4 (S_3 S_\beta + C_\beta C_3)
 \end{aligned}$$

上式两边平方相加化简可得,

$$\begin{aligned}
 m C_2 - n S_2 &= (L_3^2 - m^2 - n^2 - L_2^2 + L_4^2 - \\
 &2L_3 L_4 S_\beta) / (2L_2 / \sqrt{m^2 + n^2})
 \end{aligned}$$

设上述等式右边为 k, 则 θ_2 可表示为:

$$\theta_2 = \text{atan2}(m, n) - \text{atan2}(k, \pm \sqrt{1 - k^2})$$

3) 求解关节角 θ_3 , 由步骤 2) 可得

$$-n C_2 - m S_2 = u S_3 - v C_3, \text{ 其中}$$

$$u = L_3 - L_4 S_\beta, v = L_4 C_\beta, \text{ 又令}$$

$$p = (n C_2 + m S_2) / \sqrt{u^2 + v^2}, \text{ 从而求得}$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(v, u) - \text{atan2}(p, \pm \sqrt{1 - p^2})$$

4) 求解关节角 θ_5 , 令(7)式和(8)式的第一行第三列、第二行第三列相等, 得

$$C_5 (C_3 S_\beta - C_\beta S_3) - C_4 S_5 (S_3 S_\beta + C_\beta C_3) = r$$

$$C_5 (S_3 S_\beta + C_\beta C_3) + C_4 S_5 (C_3 S_\beta - C_\beta S_3) = s$$

其中,

$$r = S_2 a_z - C_1 C_2 a_x - C_2 S_1 a_y, s = -C_2 a_z -$$

$$C_1 S_2 a_x - S_1 S_2 a_y$$

将上述两式进行化简, 可得,

$$t = C_5 = r C_3 S_\beta + s C_3 C_\beta + s S_3 S_\beta - r S_3 C_\beta$$

$$\text{求得 } \theta_5 = \text{atan2}(\pm \sqrt{1 - t^2}, t)$$

5) 求解关节角 θ_4 , 由步骤 4), 可得

$$C_4 = (C_5 S_\beta - r C_3 - s S_3) / C_\beta S_5, \text{ 令,}$$

$$w = (C_5 S_\beta - r C_3 - s S_3) / C_\beta S_5, \text{ 可求解}$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(\pm \sqrt{1 - w^2}, w)$$

6) 求解关节角 θ_6 , 令(7)式和(8)式的第三行第一列、第三行第二列相等, 得

$$C_6 (C_1 n_y - S_1 n_x) + S_6 (C_1 o_y - S_1 o_x) = S_4 C_5$$

$$C_6 (C_1 o_y - S_1 o_x) - S_6 (C_1 n_y - S_1 n_x) = -C_4$$

$$\text{令, } h = (C_1 n_y - S_1 n_x)^2 + (C_1 o_y - S_1 o_x)^2, \text{ 则}$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(-S_4 C_5 / h, -C_4 / h) + a \tan 2(C_1 n_y - S_1 n_x / h, C_1 o_y - S_1 o_x / h)$$

注: $\text{atan2}(x,y)$ 在 MATLAB 中表示四象限的反正切函数。

注: $\text{atan2}(x,y)$ 在 MATLAB 中表示四象限的反正切函数。

5.2 逆运动学中多解处理

从上述求得的结果可以看出逆运动学求解存在多组解。通常情况下, 连杆长度非零的个数越多, 达到指定位姿的方式就会越多, 对于具有 6 个旋转关节的

机器人操作臂来说,其逆解最大个数和连杆长度关系如表 2 所示.

表 2 解个数与连杆长度关系

连杆长 a_i	解个数
$a_1=a_3=a_5=0$	≤ 4
$a_3=a_5=0$	≤ 8
$a_3=0$	≤ 16
所有的 $a_i \neq 0$	≤ 16

多组合解中某些解由于关节运动范围限制是无法达到要求的,或者求出的解需要加减 π 以得到关节范围内其它可能解.如果求得多组解满足要求,由于运动的连续性,所以通常要根据“最短行程”准则,即将求解得到的关节角度与前一关节角之间进行距离求解,选择具有距离最近即最少运动的解作为最优解,过程如图 3.

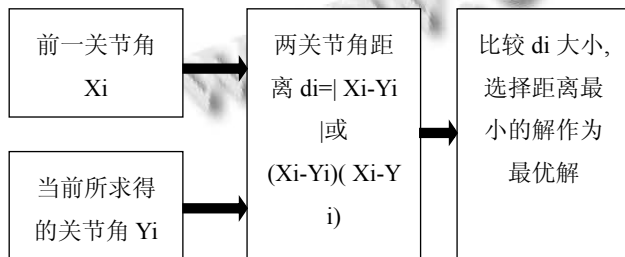


图 3 逆运动学中多解选择最短行程准则

5.3 解正确性验证

首先给出一组关节角,由这些关节角求出末端位姿即求解正运动学,然后根据末端位姿求出其对应各关节角即求解逆运动学,选择一组最优解作为逆解.设初始各关节角依次为: $0, -90, 0, 0, 0$,然后将关节角和其它已知的 D-H 参数带入正运动学方程(1)式,利用 MATLAB 计算得位姿矩阵为:

$$T = \begin{bmatrix} -0.0300 & 0 & 0.9996 & 883.4065 \\ 0 & -1.0000 & 0 & 0 \\ 0.9996 & 0 & 0.0300 & 722.0110 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 \end{bmatrix}$$

从姿态矩阵可以看出,求得的机器人操作臂末端姿态(如表 3 所示)与实际初始状态位姿是一致的.利用 MATLAB 中仿真结果,如图 4.

然后利用求得位姿带入逆运动学方程(3)式,验证关节角是否一直,利用 MATLAB 求得与给定初始关节角一致的一组解为: $0.0004, -90.0002, 0.0000, 0.0000, 0.0001, 0.0004$,从计算结果可以看出逆解得到的各关

节角与所给初始关节角基本相等,符合所要求的解.

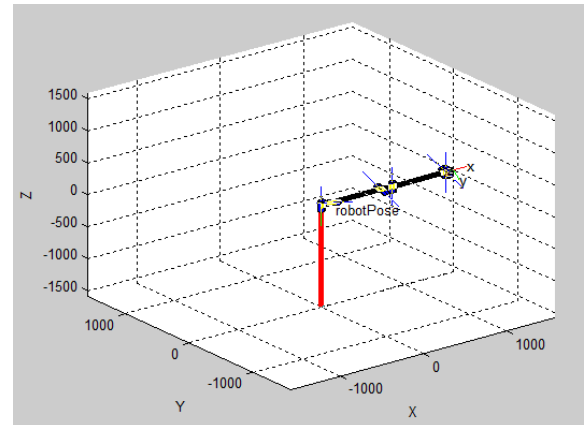


图 4 位姿仿真图

表 3 操作臂末端位置和姿态

姿态			位置
n	o	a	p
-0.0300	0	0.9996	883.4065
0	-1.0000	0	0
0.9996	0	0.0300	722.0110

6 结语

通用的 D-H 建模方法虽然简单应用广泛,但是当遇到两个相邻的平行关节时就会失效,而得不到期望的正确运动学模型.修正的 D-H 法基于通用 D-H 产生缺陷的根本出发,针对两相邻的平行关节和不平行关节分别进行建模,利用五参数实现正确的运动学模型建立.在分析了通用 D-H 和修正 D-H 法特点的基础上,以六关节串联机器人对象,对修正的 D-H 模型理论进行了实际验证,通过已知的一组关节角求得其对应的末端位姿;再由一个已知的末端位姿,求得与该位姿对应的多个可能的关节角,并根据最短行程准则求出一组最优解.仿真结果验证了修正 D-H 模型在平行关节时得到的运动学模型的正确性.

参考文献

- Denavit J, Hartenberg RS. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Asme Journal of Applied Mechanics*, 1955: 215-221.
- Jazar, Reza N. *Theory of applied robotics. Kinematics, dynamics, and control. Theory of Applied Robotics* Springer-Verlag GmbH, 2010: 171-367.

- 3 谭民,徐德,候增广等.先进机器人控制.北京:高等教育出版社,2007.
- 4 Paul RP, Shimano BE, Mayer G. Kinematics control equations for simple manipulators. IEEE Trans. SMC, 1981, (6): 449-445.
- 5 哈乐,王东辉.基于 D-H 参数方法的微创手术机器人运动仿真研究.医疗卫生装备,2014,11.
- 6 梁安阳等.基于 D-H 坐标系法的移动喷漆机器人运动学分析.机械工程与自动化,2005,10(5):125-127.
- 7 Goldenberg AA, Benhabib B, Fenton RG. A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1985, 1(1): 14-20.
- 8 Ni ZS, Liao QZ, Wu XX. General 6R robot inverse solution algorithm based on a quaternion matrix and a Groebner base. Tsinghua University, 2013, 53(5): 684-686
- 9 Manocha D, Canny JF. Efficient inverse kinematics for general 6R manipulators. IEEE Trans. on Robotics and Automation, 1994, 10(5): 648-657.
- 10 Yuan T, Feng Y. A new algorithm for solving inverse kinematics of robot based on BP and RBF neural network. 2014 Fourth International Conference on Instrumentation and Measurement, Computer, Communication and Control (IMCCC), IEEE. 2014. 418-421