

基于超球面采样 UDU^TUKF 算法的炮弹姿态测定^①

李雅梅¹, 丁宗富¹, 宋春雷², 刘志德¹

¹(辽宁工程技术大学 电气与控制工程学院, 葫芦岛 125000)

²(北京理工大学 自动化学院, 北京 100081)

摘 要: 针对炮弹发射时冲击性高、惯性飞行和飞行时间短的特点, 提出一种基于超球面采样的 $UDUT$ 无迹卡尔曼滤波算法 ($SS-UDUTUKF$), 估算炮弹运行姿态。针对炮弹运动规律的特殊性, 建立系统的线性状态方程和非线性量测方程, 采用三个微机电加速度计作为惯性测量单元测量比力矢量。采用 $UDUTUKF$ 算法估计非线性系统的状态, 抑制滤波的发散, 提高滤波的稳定性。 $SS-UDUTUKF$ 滤波算法具有很好的数值稳定性, 能防止估计误差方差阵失去非负定性和对称性, 可有效的抑制由于计算舍入误差而造成的滤波不稳定的问题。在三轴飞行测试转台上的仿真实验表明该算法具有很高的估算精度, 满足炮弹姿态实时测定的要求。

关键词: 姿态测量; 微机电传感器; 超球面采样; 无迹卡尔曼滤波

Spherical Simplex $UDUT$ UKF Algorithm for Projectile's Attitude Determination

LI Ya-Mei¹, DING Zong-Fu¹, SONG Chun-Lei², LIU Zhi-De¹

¹(Faculty of Electronic and Control Engineering, Liaoning Technical University, Huludao 125000, China)

²(School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: Considering the performance of short-time working, inertial flight and high impulse of launch for projectile, a spherical simplex $UDUT$ unscented Kalman filter ($SS-UDUTUKF$) is proposed to estimate the state of attitude determination system. According to the special motional rule of projectile, only use three low-cost MEMS accelerometers as inertial measurement unit to measure the specific force, and construct the linear state equation and nonlinear measurement equation of system. Use the $UDUT$ UKF to estimate the state of nonlinear system, which effectively enhances the stability of filter and restrains the divergence of filter. The $SS-UDUTUKF$ algorithm has good numerical stability, avoids losing the non-negative definiteness and symmetry of estimation covariance and effectively restrains the divergence of filter resultingly from rounding error of calculation. The experimental results in a three-axis flight test rotary table show that the proposed algorithm obtains the good precision of estimation and satisfies the request of real-time response of projectile's attitude determination.

Key words: attitude determination; micro-electro-mechanical systems; spherical simplex; unscented kalman filter

现代战争中, 炮弹在打击敌军军事力量中, 起着重要的作用。为控制炮弹的运动, 必须首先测得炮弹的运行姿态。在炮弹的导航和制导过程中, 惯性传感器和电子测量系统应能精确测量炮弹的姿态信息, 并能承受炮弹发射时的高 g 冲击。通常, 采用昂贵的加速度计和陀螺仪能够获得高精度的姿态信息。考虑到炮弹的尺寸和生产成本, 这是不经济的, 而且要制造

出能承受 20000g 或更高加速度的高精度陀螺仪也是很困难的^[1]。近几年, 很多低精度的微机电(Micro-Electro-Mechanical Systems, MEMS)传感器用于炮弹姿态测定系统中^[2], 这些传感器具有尺寸小、寿命长、可靠性高、抗振动冲击能力强等特点。通过大量地基和飞行试验表明微机电传感器既能承受发射时的高冲击力, 又能在飞行的炮弹上稳定运行^[3]。本文采用三个

① 基金项目:国家自然科学基金(50874059);武器装备预研基金(51309030102)

收稿时间:2011-08-03;收到修改稿时间:2011-09-26

MEMS 加速度计构成捷联惯性测量单元(Strap-down Inertial Measurement Unit, IMUs)来测量飞行炮弹的滚转角和俯仰角。

无迹卡尔曼滤波器 (Unscented Kalman Filter, UKF) 是由 S.J. Julier 提出的^[4]。它无需对非线性函数进行线性近似, 可直接用于非线性模型, 并估计随机变量的概率密度分布。因此 UKF 算法可有效避免非线性方程线性化过程中的估计误差, 提高了滤波精度。此外, UKF 算法还无需计算雅克比矩阵, 当非线性函数不连续时, UKF 能够跨越这些不连续, 即使非线性函数比较复杂, 也并不增加算法实现的难度。相比于扩展卡尔曼滤波器 (Extended Kalman Filter, EKF), UKF 计算量增加不多, 但同时滤波误差小于 EKF^[5-7]。由于 UKF 算法使用简单, 它被广泛应用于解决导航系统的非线性估计问题。

1 系统模型设计

采用对称刚体模型作为炮弹运行模型。载体坐标系和导航坐标系如图 1 所示。导航坐标系是地球固定坐标系, 原点位于炮弹发射口底部。载体坐标系 (OX_bY_bZ_b)原点位于炮弹的质心。图 1 中 γ,ψ,θ 分别代表滚转角、方位角和俯仰角。

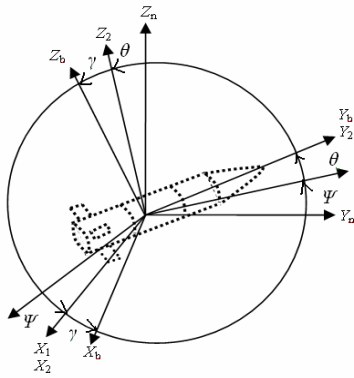


图 1 坐标系的定义

炮弹是一个旋转的自由飞行器, 它绕滚转轴旋转的速度为 L, 俯仰角 θ 缓慢变化。由于炮弹的旋转是连续的, 如果忽略方位角 ψ 的变化, 那么滚转角 γ 将线性变化, 可得:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \gamma \\ \psi \end{bmatrix} + w \quad (1)$$

这里, w~N(0,Q)是系统过程噪声, Q 是过程噪声方差。由上述定义可得方向余弦矩阵为:

$$C_n^b = \begin{bmatrix} c\gamma c\psi - s\gamma s\psi s\theta & c\gamma s\psi + s\gamma c\psi s\theta & -s\gamma c\theta \\ -s\psi c\theta & c\psi c\theta & s\theta \\ s\gamma c\psi + c\gamma s\psi s\theta & s\gamma s\psi - c\gamma c\psi s\theta & c\gamma c\theta \end{bmatrix} \quad (2)$$

ci 和 si(i=γ,ψ,θ)分别代表角 i 的正弦和余弦。

比力矢量 f 的表达式为 f_n=[0 0 -f]^T, 它建立在炮弹载体坐标系中。由此, 可得下式:

$$f_b = C_n^b f_n \quad (3)$$

其中, f_b=[f_x f_y f_z]^T

由(3)式可得:

$$f_b = (f \sin \gamma \cos \theta \quad -f \sin \theta \quad -f \cos \gamma \cos \theta)^T \quad (4)$$

考虑到 MEMS 的测量值含噪声, 测量方程改为:

$$y = \begin{bmatrix} f \sin \gamma \cos \theta \\ -f \sin \theta \\ -f \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} + v \quad (5)$$

v 代表测量噪声。

状态方程为:

$$\begin{bmatrix} \theta_{k+1} \\ \gamma_{k+1} \\ \dot{\gamma}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ \gamma_k \\ \dot{\gamma}_k \end{bmatrix} \quad (6)$$

由于测量方程是非线性的, 状态方程是线性的, 本文用无迹卡尔曼滤波器估计旋转炮弹运动姿态, 可以测得连续的系统状态信息, 并能向舵机提供连续的横滚角和俯仰角信息。

2 SS-UDU^TUKF算法

2.1 超球面采样

标准 UKF 算法采用 2n+1 个 Sigma 点表示随机状态变量的概率密度分布, 并且在滤波的每一步, 2n+1 个 Sigma 点都要进行计算^[8], 因而 UKF 的计算复杂、效率低。如果能采用某种算法减少采样点的数目, 可显著提高 UKF 算法的计算效率。

假设随机变量的均值和方差是已知的, 一个 n 维随机变量 x 可以用 n+2 个 Sigma 点和相应的权系数来表示它们能捕获所有误差分布的统计信息^[9]。

采样点的确定包括: 采样点的数目、位置和权值。采样点要抓住 x 的重要特征。加权系数约束条件是:

$$g[S, p(x)] = 0$$

采样点的选取原则是: 在 g[S, p(x)]=0 的前提下, 最小化代价函数 c[S, p(x)]。超球面采样只要求匹配前

两阶矩,但是要求除中心点外的其他 Sigma 点权值相同,并且到中心点距离相同。因此,采样点位于一个超球面上。

用 x_i^j 表示第 j 维空间协方差为 $P_x=I_{n \times n}$ 、均值为零的第 i 个 Sigma 点。

在一维空间的三个 Sigma 点为:

$$\chi_0^1 = [0] \quad , \quad \chi_1^1 = [-x_1] \quad , \quad \chi_2^1 = [x_2]$$

相应的权值为, w_1, w_2, w_3 均值为 \hat{x} , 协方差为 P_x , 由此可得公式:

$$\begin{cases} W_0 + W_1 + W_2 = 1 \\ -W_1 x_1 + W_2 x_2 = 0 \\ W_1 x_1^2 + W_2 x_2^2 = 1 \end{cases} \quad (7)$$

当 $x_1=x_2$ 时,(7)式的解为:

$$x_1 = \frac{1}{2\sqrt{W_1}} \quad , \quad W_1 = W_2 = \frac{1 - W_0}{2}$$

其中 W_0 是一个自由参数,其值影响到 Sigma 点集的四阶及四阶以上高阶矩。

在二维空间中,要增加一个点 x_3 , 它的坐标为 $(0, s_3 x_3)$, 权值为 W_3 。其中, s_3 是尺度因子。由约束条件可得:

$$\begin{cases} W_0 + 2W_1 + W_3 = 1 \\ -2W_1 x_3 + W_3 s_3 x_3 = 0 \\ 2W_1 x_3^2 + W_3 s_3^2 x_3^2 = 1 \end{cases} \quad (8)$$

由于各点均位于一个超球面上,除原点外,各点具有相同的权值即 $w_1 = w_2 = w_3$ 。因此,由(8)式可得:

$$s_3 = 2 \quad , \quad x_1^2 = 1/2w_1 \quad , \quad x_3^2 = 1/6w_1$$

类似的,扩展到 n 维空间,同样可得 Sigma 点和权值。

球面采样算法如下^[10]:

1)选择: $0 \leq W_0 \leq 1$;

2)权值的确定:

$$W_i = (1 - W_0)/(n+1) \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (9)$$

3)迭代初始矢量为:

$$\chi_0^1 = [0] \quad \chi_1^1 = [-\frac{1}{2\sqrt{W_1}}] \quad \chi_2^1 = [\frac{1}{2\sqrt{W_1}}]$$

4)对于维数为 $j = 2, \dots, n$ 的迭代公式为:

$$\chi_i^j = \begin{cases} \begin{bmatrix} \chi_0^{j-1} \\ 0 \end{bmatrix} & i = 0 \\ \begin{bmatrix} \chi_i^{j-1} \\ -1/\sqrt{j(j+1)W_1} \end{bmatrix} & i = 1, \dots, j \\ \begin{bmatrix} 0_{j-1} \\ 1/\sqrt{j(j+1)W_1} \end{bmatrix} & i = j+1 \end{cases} \quad (10)$$

5)考虑 x 的均值和协方差,计算 Sigma 点为:

$$X_i = \hat{x} + \sqrt{P_x} \chi_i^n \quad i = 0, \dots, n+1 \quad (11)$$

在超球面采样算法中,除中心点外,各采样点的权值均为 $(1 - W_0)/(n+1)$ 。各采样点和中心点的距离相等,并且这些点位于超球面上,超球面的半径为 $\sqrt{n(1 - W_0)}$ 。

2.2 SS-UDU^TUKF 算法

UDU^TUKF 算法不需要计算协方差 p_k 的平方根,数值稳定性好^[11]。用 UDU^TUKF 算法进行状态估计时,利用改进的 Cholesky 分解算法 $P_k = UDU^T$ 将估计协方差 P_k 分解,其中, U 是上三角矩阵, D 是对角矩阵。UDU^TUKF 算法迭代更新 U 和 D 。在测量更新时,UDU^TUKF 算法采用标量测量更新方法。测量向量随着标量的更新而更新,避免了矩阵求逆运算和求解线性方程组。

将 UDU^TUKF 算法和超球面采样算法结合起来,本文提出了一种 SS-UDU^TUKF 滤波算法。该算法具有很好的数值稳定性,能防止估计误差方差阵失去非负定性和对称性,可有效的抑制由于计算舍入误差而造成的滤波不稳定问题。与 UDU^TUKF 算法相比,通过使用超球面采样算法,采样点从 $2n+1$ 个减少到 $n+2$ 个,使计算量大大减小,计算效率大大提高。对于 UDU^TUKF 算法,设一个 Sigma 点在一个采样周期中的计算量为 M ,则整个 UDU^TUKF 算法的计算量为 $(2n+1)M$ 。而 SS-UDU^TUKF 算法的计算量减少为 $(n+2)M$ 。显然,计算量有很大的减少,而且随着维数的增加,计算量的减少就更明显。

对于非线性离散系统:

$$\begin{cases} x_k = f_{k-1}(x_{k-1}) + w_{k-1} \\ y_k = h_k(x_k) + v_k \end{cases} \quad (12)$$

其中, x_k 和 y_k 分别为 n 维和 m 维随机变量, w_k 和 v_k 是期望为零的高斯白噪声。

超球面采样 UDU^TUKF 算法如下:

初始化: $\hat{x} = E(x_0)$

$$P_0 = U_0 D_0 U_0^T = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \quad (13)$$

计算 Sigma 点:

$$S_{k-1} = U_{k-1} \sqrt{D_{k-1}} \quad (14)$$

$$X_{i,k-1} = \hat{x}_{k-1} + S_{k-1} \chi_i^n, \quad i = 0, \dots, n+1 \quad (15)$$

时间更新:

$$X_{i,k|k-1} = f_{k-1}[X_{i,k-1}], \quad i = 0, \dots, n+1 \quad (16)$$

$$\hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{n+1} W_i X_{i,k|k-1} \quad (17)$$

$$P_k^- = \sum_{i=0}^{n+1} W_i [X_{i,k|k-1} - \hat{x}_k^-][X_{i,k|k-1} - \hat{x}_k^-]^T + Q \quad (18)$$

$$U_k^- D_k^- U_k^{-T} = P_k^- \quad (19)$$

量测更新:

$$U_- = U_k^-, D_- = D_k^-, \hat{x}_- = \hat{x}_k^- \quad (20)$$

采用标量测量更新, 对 $j=1, \dots, m$ 时, 循环计算迭代公式(21)~(30):

$$S_j^- = U_- \sqrt{D_-} \quad (21)$$

$$Y_{i,j} = \hat{x}_- + S_j^- \chi_i^n, i=0, \dots, n+1 \quad (22)$$

$$\xi_{i,j} = h_{k,j}[Y_{i,j}], i=0, \dots, n+1 \quad (23)$$

$$\hat{y}_j = \sum_{i=0}^{n+1} W_i \xi_{i,j} \quad (24)$$

$$p_j^y = \sum_{i=0}^{n+1} W_i (\xi_{i,j} - \hat{y}_j)^2 + R_j \quad (25)$$

$$p_j^{xy} = \sum_{i=0}^{n+1} W_i (\xi_{i,j} - \hat{y}_j)[Y_{i,j} - \hat{x}_-] \quad (26)$$

$$K_j = p_j^{xy} / p_j^y \quad (27)$$

$$\hat{x}^+ = \hat{x}_- + (y_j - \hat{y}_j)K_j \quad (28)$$

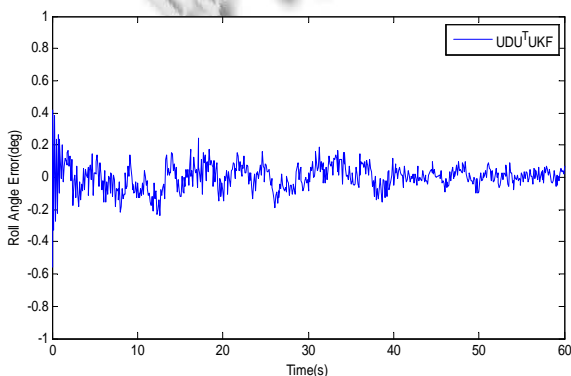
$$U_+ D_+ U_+^T = U_- D_- U_-^T - p_j^y K_j K_j^T \quad (29)$$

$$U_+ = U_+, D_+ = D_+, \hat{x}_+ = \hat{x}^+ \quad (30)$$

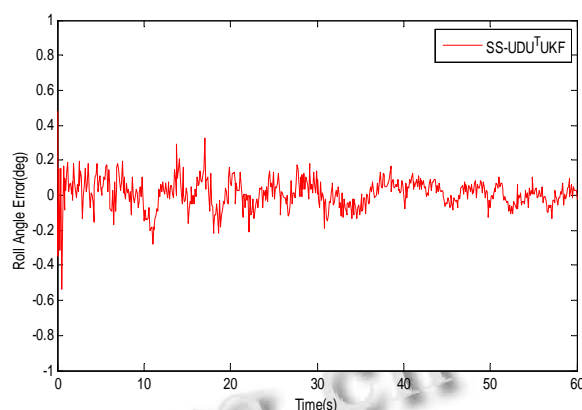
3 算法仿真结果分析

在三轴飞行测试转台上仿真, 验证了 SS-UDU^TUKF 算法的有效性。采用三个 MEMS 加速度计作为 IMU, 用于测定旋转炮弹的姿态, 加速度计的测量范围是 ±10g。

试验参数为: 采样周期 0.01s, 转台的转动时间 60s, 转台的横滚角速率为 50 度/秒, 俯仰角的变化过程为 0°~75°~-45°, 以 10°/s 的速率匀速变化。

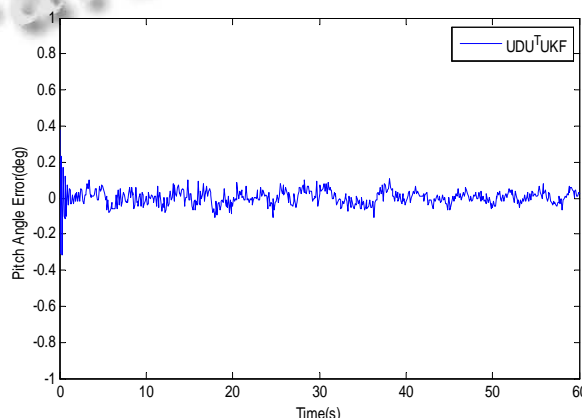


(a) UDU^TUKF 算法的误差曲线

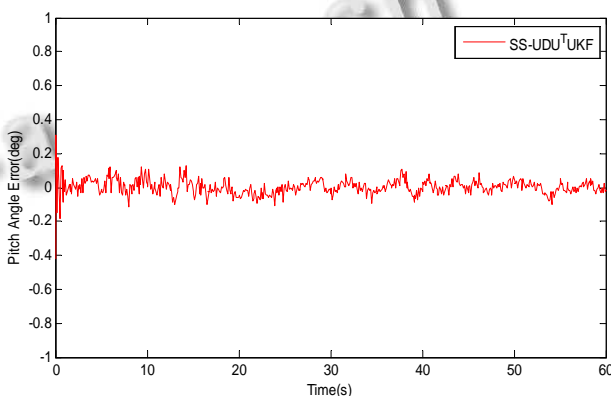


(b) SS-UDU^TUKF 算法的误差曲线

图 2 横滚角误差曲线



(a) UDU^TUKF 算法的误差曲线



(b) SS-UDU^TUKF 算法的误差曲线

图 3 俯仰角误差曲线

图 2 至图 4 分别是 UDU^TUKF 算法和 SS-UDU^TUKF 算法的横滚角误差曲线、俯仰角误差曲线和横滚角速率误差曲线对比图。

在炮弹姿态测定系统中, 要求滤波具有很高的实时性, 将 SS-UDU^TUKF 算法用于估计弹体姿态。分析图

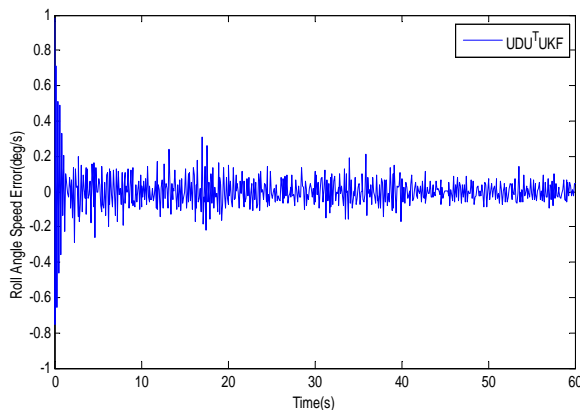
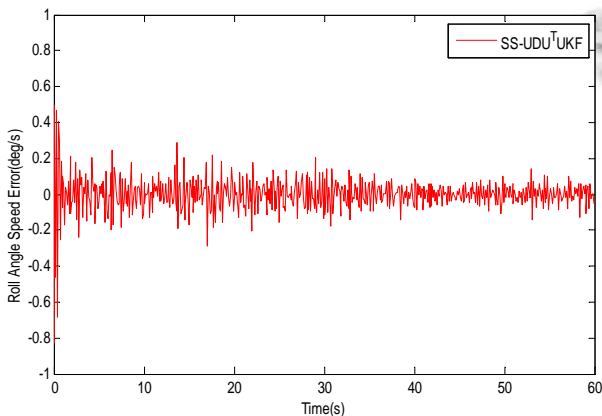
(a) UDU^TUKF 算法的误差曲线(b) $SS-UDU^TUKF$ 算法的误差曲线

图 4 横滚角速率误差曲线

2 到图 4, 可以看到, 采用 $SS-UDU^TUKF$ 算法横滚角误差小于 0.2 度, 俯仰角误差小于 0.1 度, 横滚角速率误差小于 0.15 度/秒, $SS-UDU^TUKF$ 算法与 UDU^TUKF 算法具有相当的估计精度。试验结果表明通过采用 $SS-UDU^TUKF$ 算法, 姿态角误差很小, 估计精度高, 滤波速度快, 这满足了炮弹短时飞行快速响应的要求。通过分析 $SS-UDU^TUKF$ 和 UDU^TUKF 的性能, 可得到如下结论: 在估计精度相当的情况下, 由于 $SS-UDU^TUKF$ 算法计算量减少, 滤波时间减少了约 28%, $SS-UDU^TUKF$ 算法的实时响应特性优于 UDU^TUKF 算法。

4 结语

试验结果表明: 用三个微机电加速度计测量比力, 用 $SS-UDU^TUKF$ 算法估计非线性系统的状态, 得到了满意的姿态信息, 达到了预定的实时性能。

对短时惯性飞行的炮弹, 需要快速高精度的姿态

测定算法来估计炮弹的姿态信息。本文采用 UDU^TUKF 算法估计姿态信息, 有效的改善了滤波的稳定性。采用超球面采样算法降低了滤波算法的计算复杂度。仿真实验结果表明采用 $SS-UDU^TUKF$ 算法估计系统状态, 变换速度快、计算精度高、滤波时间短, 满足了炮弹姿态确定系统的快速实时响应要求。

参考文献

- 1 Rouger Z. Guidance P. and control of artillery projectiles with magnetic sensors. 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. 2007:8-11.
- 2 Davis BS. Institute of Electric and Electronic Engineer. Using low-cost MEMS accelerometers and gyroscopes as strapdown IMUs on rolling projectiles. Position Location and Navigation Symposium, IEEE, Palm Springs, CA, 1998: 594-601.
- 3 Julier SJ, Uhlmann JK, Durrant-Whyte HF. A new approach for filtering nonlinear systems. Proc. of the American Control Conference. IEEE, Washington, 1995:1628-1632.
- 4 Shin EH, El-sheimy N. An unscented Kalman filter for in-motion alignment of low-cost IMUs. Position Location and Navigation Symposium, IEEE, 2004:273-279.
- 5 Julier SJ, Uhlmann JK. Reduced sigma point filters for the propagation of means and covariances through nonlinear transformations. Proce. of the American Control Conference. Anchorage AK, 2002: 887-892.
- 6 Kandepu R, Foss B, Imsland L. Applying the unscented Kalman filter for nonlinear state estimation. Journal of Process Control, 2008,18(7/8):753-768.
- 7 Kolas SB, A Foss T S, Schei, et al. Constrained nonlinear state estimation based on the UKF approach. Computers & Chemical Engineering, 2009,33(8):1386-1401.
- 8 Nemra A, Aouf N. Robust INS/GPS Sensor Fusion for UVA Localization Using SDRE Nonlinear Filtering. IEEE Sensors Journal, 2010,11(4):789-798.
- 9 Julier SJ. The spherical simplex unscented transformation. Denver, Colorado, USA. Proc. of the American Control Conference. 2003: 2430-2434.
- 10 Lü SL, Chen JB, Liu ZD. UDUT continuous-discrete unscented Kalman filtering. 2nd International Symposium on Intelligent Information Technology Application. 2008: 876-879.
- 11 Julier S, Uhlmann J, Durrant-Whyte HF. A new method for the nonlinear transformation of means and covariance in filters and estimators. IEEE Trans. on Automatic Control, 2000,45(3):477-482.