一种基于迭代学习的移动机器人轨迹跟踪控制方法①

韩 龙，刘国栋
(江南大学物联网工程学院，江苏 无锡 214122)

摘 要：机器人迭代学习在某些场合下有着重要的应用。传统的 P 型或 PD 迭代学习需要较长的迭代过程，本文提出了一种具有快速收敛的迭代学习策略。在给出的轮式移动机器人运动学模型基础上进行了仿真，结果证明了策略的有效性。

关键词：机器人迭代学习；快速收敛；轮式移动机器人

A Kind of Mobile Robot Trajectory Tracking Control Methods Based on Iterative Learning

HAN Long，LIU Guo-Dong
(Jiangnan University Internet Of Things Engineering Institute Jiangsu Wu Xi 214122)

Abstract：The Robot iterative learning in some places has an important application. Compared with the traditional types of P or PD iterative learning ,this paper proposes a kind of iterative learning strategies which have a rapid convergence, and then we have a simulation based on the robot kinematics model given. The results show the effectiveness of the strategy.

Key words：Robot iterative learning; rapid convergence; wheeled mobile robots

1 引言

移动机器人具有时变、强耦合、非线性等特征，使得实际上无法获得移动机器人的精确、完整的运动学模型。在某些特殊场合下，移动机器人的规划轨迹是已知的，如何控制机器人的运动来跟踪轨迹呢？迭代学习（Iterative Learning Control）为解决这类问题提供了一种有效的途径。

迭代学习这个概念最早是由日本学者 S.Uchiyama 提出的，然后 S.Arimoto[1]、Z.Bien 等人进行了深入的研究，目前这这种方法主要应用有全局优化、模型参数辨识等[2-4]。迭代学习就是根据前几次运行所产生的状态或输出误差，按照一定的学习策略来修正上一次的输入，经过多次迭代，直到使误差在允许的范围之内[5]。传统的迭代学习策略有 P 型、PD 型和 PID 等，但是这些算法都是采用试探的方法来进行迭代且迭代次数比较长[6]。文献[7-9]分别提出了新的迭代学习控制器的设计，并利用过去的有效信息来解决期望轨迹变化时的问题。本文提出了迭代学习策略，通过模糊学习来改变初始迭代值，从而具有较快的收敛速度，仿真证明了其有效性。

2 轮式移动机器人系统描述

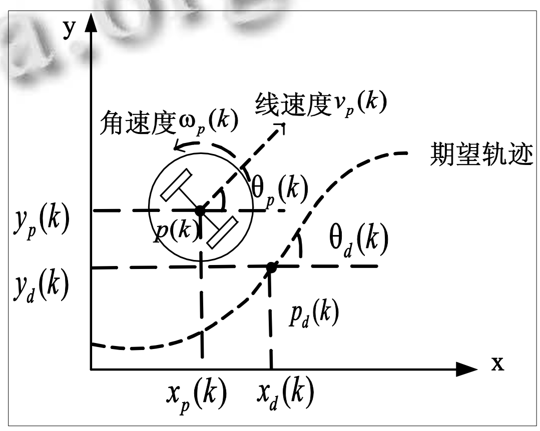


图 1 轮式移动机器人运动模型

① 收稿时间:2011-07-14;收到修改稿时间:2011-09-07

图 1 为轮式机器人运动模型，在同轴上有两个独立的驱动轮，驱动机器人在二维平面上运动[10]。点 $p(k)$ 是左右驱动轮的中点，代表机器人的当前位置，在广义坐标系下 $p(k)$ 点定义为 $\left[x_p(k), y_p(k), \theta_p(k)\right]$，其中 $x_p(k)$ 和 $y_p(k)$ 为直角坐标系下 x、y 轴的坐标分量；$\theta_p(k)$ 为机器人的方向角，$p(k)$ 点的线速度和角速度分别为 $v_p(k)$、$\omega_p(k)$。根据图 1，$p(k)$ 点的轮式移动机器人的离散运动学方程如式：

$$\begin{bmatrix} x_p(k+1) \\ y_p(k+1) \\ \theta_p(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_p(k) \\ y_p(k) \\ \theta_p(k) \end{bmatrix} + \Delta T * \begin{bmatrix} \cos\theta_p(k) & 0 \\ \sin\theta_p(k) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_p(k) \\ \omega_p(k) \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中，ΔT 为采样时间，记 $\mathbf{q}(k) = [x_p(k), y_p(k), \theta_p(k)]^T$ 为状态向量，$\mathbf{u}_p(k) = [v_p(k), \omega_p(k)]^T$ 为速度向量，由(2)式确定：

$$\begin{cases} v_p(k) = v_r + v_{l/2} \\ \omega_p(k) = v_p(k)_{/r} \end{cases} \quad (2)$$

其中，v_r、v_l 分别为轮式机器人右左轮的速度，r 为机器人的半径。则(2)式可以改写

$$\mathbf{q}(k+1) = \mathbf{q}(k) + \mathbf{B}(\mathbf{q}_p(k), k)\mathbf{u}_p(k) \quad (3)$$

其中，输入矩阵

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}_p(k), k) = \Delta T * \begin{bmatrix} \cos\theta_p(k) & 0 \\ \sin\theta_p(k) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2 轨迹跟踪问题描述

如图 1 中虚线为机器人的期望轨迹，因此期望轨迹上的 $p_d(k)$ 点的状态向量为 $p_d(k) = [x_d(k), y_d(k), \theta_d(k)]^T$，定义状态向量误差 $\Delta\mathbf{q}$，如式(4)：

$$\Delta\mathbf{q}(k) = \mathbf{q}_d(k) - \mathbf{q}(k) = \begin{bmatrix} x_d(k) - x_p(k) \\ y_d(k) - y_p(k) \\ \theta_d(k) - \theta_p(k) \end{bmatrix} \quad (4)$$

考虑到实际环境有噪音等的影响，因此移动机器人的离散运动学方程可描述为式(5)：

$$\begin{cases} q(k+1) = q(k) + B(q_p(k), k)u_p(k) + \xi(k) \\ y(k) = q(k) + \eta(k) \end{cases} \quad (5)$$

其中，$\xi(k)$、$\boldsymbol{\eta}(k)$ 是状态噪声向量和输出策略噪声向量。当机器人进行迭代学习控制时，(5)式可以改写为：

$$\begin{cases} \mathbf{q}_i(k+1) = \mathbf{q}_i(k) + \mathbf{B}_i(\mathbf{q}_p(k), k)\mathbf{u}_{i,p}(k) + \xi_i(k) \\ y_i(k) = \mathbf{q}_i(k) + \boldsymbol{\eta}_i(k) \end{cases} \quad (6)$$

其中，i 为迭代次数。这样轨迹跟踪问题就转换为 $p(k)$ 点去逼近 $p_d(k)$ 点运动的问题，即

$$\theta_p(k) \to \theta_d(k), \quad y_p(k) \to y_d(k), \\ x_p(k) \to x_d(k)。$$

3 学习控制率设计

3.1 定义 1 向量范数

设向量 $C \in R^n$，则

$$\|C\| = \sqrt{C^T C} \quad (7)$$

定义为向量范数。

3.2 迭代学习律设计

本文设计的迭代学习控制律为：

$$\mathbf{u}_{i+1}(k) = \mathbf{p}_i\mathbf{u}_i(k) + \mathbf{L}_1(k)\mathbf{e}_i(k+1) + \mathbf{L}_2(k)\mathbf{e}_{i+1}(k) \quad (8)$$

其中 i 为迭代次数，误差信号为 $\mathbf{e}_i(k) = \mathbf{y}_d(k) - \mathbf{y}_i(k)$，$\mathbf{L}_1$、$\mathbf{L}_2$ 为学习增益矩阵且有界，即 $\|\mathbf{L}_1\| \le c_{L_1}$，$\|\mathbf{L}_2\| \le c_{L_2}$，其中 c_{L_2}，c_{L_2} 为正常数；$\mathbf{p}_i$ 表示本次迭代输入 $\mathbf{u}_i$ 和上一次迭代输入 $\mathbf{u}_{i-1}$ 的接近程度，且 $0 < \|\mathbf{p}_i\| \le 1$，下面将做具体说明。在证明控制律收敛之前，先约定其满足几个假设条件：

(1) 由(6)式可知，在理想情况下，即 $\zeta_i(k) = 0$ 和 $\eta_i(k) = 0$，则：

$$\begin{cases} \mathbf{q}_d(k+1) = \mathbf{q}_d(k) + \mathbf{B}(\mathbf{q}_d(k), k)\mathbf{u}_d(k) \\ \mathbf{y}_d(k) = \mathbf{q}_d(k) \end{cases}$$

(2) 输入矩阵满足 Lipschitz 条件且有界 $\|B(q_1,k) - B(q_2,k)\| \le c_B\|q_1 - q_2\|$ 和 $\|B(q_i(k),k)\| \le b_B$，其中 c_B、b_B 为常数。

(3) 控制输入 u_d、干扰 $\zeta(k)$ 和噪声 $\eta(k)$ 有界，则 $\max\limits_{1\le k\le n}\|u_d(k)\| \le c_{u_d}$ 、 $\max\limits_{1\le i\le\infty}\max\limits_{1\le k\le n}\eta_i(k) \le c_\eta$ 和 $\max\limits_{1\le i\le\infty}\max\limits_{1\le k\le n}\zeta_i(k) \le c_\zeta$，其中 c_ζ、c_{u_d} 和 c_η 为正常数。

(4) 每次迭代从 $q_d(0)$ 的邻域开始，即 $\|q_d(0) - q_i(0)\| \le c_{q_0}$，$c_{q_0}$ 为正常数。

证明：由式(4)可知：

$$\begin{aligned}\Delta q_i(k+1) &= q_d(k+1) - q_i(k+1) \\ &= q_d(k) + B(q_d(k),k)u_d(k) - \\ &\quad [q_i(k) + B(q_i(k),k)u_i(k) + \xi_i(k)] \\ &= \Delta q_i(k) + B(q_d(k),k)u_d(k) - \\ &\quad B(q_i(k),k)u_i(k) - \xi_i(k) \\ &= \Delta q_i(k) + B(q_d(k),k)u_d(k) - B(q_i(k),k) * \\ &\quad [u_i(k) - u_d(k) + u_d(k)] - \xi_i(k)\end{aligned}$$

整理后得到：

$$\begin{aligned}\Delta q_i(k+1) = \Delta q_i(k) &+ [B(q_d(k),k)u_d(k) \\ &- B(q_i(k),k)u_i(k)] * u_d(k) \\ &+ B(q_i(k),k) * \Delta u_i(k) - \xi_i(k)\end{aligned} \tag{9}$$

对(9)式两边同时取范数，则

$$\begin{aligned}&\|\Delta q_i(k+1)\| = \|\Delta q_i(k)\| + \| \ B(q_d(k),k)u_d(k) \\ &- B(q_i(k),k)u_i(k) \ \| * \|u_d(k)\| + \|B(q_i(k),k)\| \|\Delta u_i(k)\|\end{aligned}$$

假设条件化简后可以得到：

$$\|\Delta q_i(k+1)\| \le \|C_B b_{q0} + 1\| \|\Delta q_i(k)\| + b_B \|\Delta u_i(k) + c_\beta \tag{10}$$

令 $h_2 = (c_B c_{q_0} + 1)$，则(10)式可以化简为：

$$\|\Delta q_i(k+1)\| \le h_2 \|\Delta q_i(k)\| + b_B \|\Delta u_i(k)\| + c_\beta \tag{11}$$

由递推关系可以推出：

$$\|\Delta q_i(k+1)\| \le \sum_{j=0}^{k-1} h_2^{k-1-j} [b_B \|\Delta u_i(j)\| + b_\xi] + h_2^k c_{q0} \tag{12}$$

下面要考察 $\Delta u_i(k)$。

$$\begin{aligned}&\Delta u_{i+1}(k) = u_d(k) - u_{i+1}(k) \\ &= u_d(k) - p_i u_i(k) - L_1 \Delta q_i(k) - L_1[B(q_d(k),k) \\ &- B(q_i(k),k)]u_d(k) + L_1 B(q_i(k),k)\Delta u_i(k) \\ &- L_2 \Delta q_{i+1}(k) + L_1[\xi_i(k) + \eta_{i+1}(k)] + L_2 \eta_{i+1}(k)\end{aligned} \tag{13}$$

由 $u_d(k) = u_d(k) - p_i[u_i(k) - u_d(k) + u_d(k)]$ $= (1-p_i)u_d(k) + p_i \Delta u_i(k)$，代入(13)式化简后得：

$$\begin{aligned}\Delta u_{i+1}(k) = (p_i &+ L_1 B(q_i(k),k))\Delta u_i(k) + (1-p_i)u_d(k) \\ &- L_1 \Delta q_i(k) - L_1[B(q_d(k),k) \\ &- B(q_i(k),k)] * u_d(k) - L_2 \Delta q_{i+1}(k) \\ &+ L_1[\xi_i(k) + \eta_{i+1}(k)] + L_2 \eta_{i+1}(k)\end{aligned} \tag{14}$$

对式(14)两边同时取范数并参考假设条件，化简后得：

$$\begin{aligned}&\|\Delta u_{i+1}(k)\| \le \rho \|\Delta u_i(k)\| + b_{L_1}(1 + c_B c_{u_d}) \|\Delta q_i(k)\| + \\ &c_{12} \|\Delta q_{i+1}(k)\| + (1-p_i)c_{u_d} + c_{L_1}(c_\xi + c_\eta) + c_{L_2} c_\eta\end{aligned} \tag{15}$$

令 $h_1 = c_{L_1}(1 + c_B c_{u_d})$，$h_3 = (1-p_i)c_{u_d} + c_{L_1}(c_\xi + c_\eta) + c_{L_2} c_\eta$，$\rho$ 为谱半径，则(15)可以化简为：

$$\begin{aligned}\|\Delta u_{i+1}(k)\| &\le \rho \|\Delta u_i(k)\| + h_1 \|\Delta q_i(k)\| + \\ &c_{L_2} \|\Delta q_{i+1}(k)\| + h_3\end{aligned} \tag{16}$$

把(12)式代入(16)式得：

$$\begin{aligned}&\|\Delta u_{i+1}(k)\| \le \rho \|\Delta u_i(k)\| + (h_1 + c_{L_2}) h_2^k c_{q0} + h_3 + \\ &h_1 \sum_{j=0}^{k-1} h_2^{k-1-j} * [b_B \|\Delta u_i(j)\| + c_\xi] + c_{12} \sum_{j=0}^{k-1} h_2^{k-1-j} \\ &[b_B \|\Delta u_i(j)\| + c_\xi]\end{aligned} \tag{17}$$

对(17)两边同时乘以 $(\frac{1}{\partial})^k$，取 ∂ 范数得，并取 $\partial > \max\{1, h_2, c_{L_2}\}$，则

$$\begin{aligned}&\|\Delta u_{i+1}(k)\|_\partial \le \rho \|\Delta u_i(k)\|_\partial + (h_1 + h_2) h_2^k c_{q0} + h_3 + \\ &(b_B \|\Delta u_i\|_\partial + c_\xi) \frac{h_1}{\partial} \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{h_2}{\partial})^{k-1-j} + (b_B \|\Delta u_{i+1}\|_\partial + c_\xi) \\ &\frac{c_{L_2}}{\partial} \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{h_2}{\partial})^{k-1-j}\end{aligned} \tag{18}$$

因为

$$\begin{aligned}&\frac{h_1}{\partial} \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{h_2}{\partial})^{k-1-j} = \frac{1}{\partial} (\frac{h_2}{\partial})^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} (\frac{h_2}{\partial})^{-j} = \frac{1}{\partial} (\frac{h_2}{\partial})^{k-1} * \\ &\frac{1 - (\frac{\partial}{h_2})^k}{1 - \frac{\partial}{h_2}} = \frac{1 - (h_2/\partial)^k}{\partial - h_2} \le \frac{1 - (h_2/\partial)^n}{\partial - h_2}\end{aligned} \tag{19}$$

取 $\partial > \max\{1, h_1, h_2, c_{L_1}, h_2 + b_B c_{L_2}\}$，把(19)式代入(18)式，化简后得：

$$\begin{aligned}&(1 - b_B c_{L_2} \frac{1 - (h_2/\partial)^n}{\partial - h_2}) \|\Delta u_{i+1}(k)\|_\partial \le (\rho + h_1 b_B \frac{1 - (h_2/\partial)^n}{\partial - h_2}) \\ &\|\Delta u_i(k)\|_\partial + (h_1 + c_{L_2}) h_2^k c_{q0} \frac{c_\xi (h_1 + b_{L_2})[1 - (h_2/\partial)^n]}{\partial - h_2}\end{aligned} \tag{20}$$

由(20)式可以得到：

$$\|\Delta u_{i+1}(k)\|_\partial \le h_4 \|\Delta u_i(k)\|_\partial + h_5 \tag{21}$$

其中

$$h_4 = \frac{\rho + h_1 b_B \frac{1 - (h_2/\partial)^n}{\partial - h_2}}{1 - b_B c_{L_2} \frac{1 - (h_2/\partial)^n}{\partial - h_2}}$$

$$h_5=\frac{(h_1+c_{L_2})h_2^k c_{q0}+\dfrac{c_\xi(h_1+b_{L_2})[1-(h_2/\partial)^n]}{\partial-h_2}}{1-b_B c_{L_2}\dfrac{1-(h_2/\partial)^n}{\partial-h_2}}$$

由(21)递推公式可以得到：

$$\begin{aligned}\|\Delta u_{i+1}(k)\|_\partial &\le h_4^i\|\Delta u_i(k)\|_\partial+h_5\sum_{j=0}^{i-1}h_4^j\\ &=h_4^j\|\Delta u_i(k)\|_\partial+\frac{h_5(1-h_4^j)}{1-h_4}\end{aligned}\tag{22}$$

取 ∂ 使得 $h_4\approx\rho<1$，则

$$\lim_{i\to\infty}\|\Delta u_i(k)\|_\partial=\frac{h_5}{1-h_4}\tag{23}$$

因此输入误差收敛。同理其他误差也都收敛，证毕。

3.3 关于 $\mathbf{p}_i$ 的说明

$\mathbf{p}_i$ 是表示本次迭代输入 $\mathbf{u}_i$ 和上一次迭代输入 $\mathbf{u}_{i-1}$ 的接近程度。以前的 P 或 PD 型学习律算法需要较长时间的迭代（大约需要迭代 500 次），本文引入这个变量主要是为了通过修正 $\mathbf{p}_i$ 来使得算法快速收敛，其算法主要是通过模糊推理来获得。假设第 i 次迭代和 i-1 次迭代的出入误差用 Δd_i 表示，对 $\Delta d_i\in[d_1,d_2]$ 进行模糊化，其中 d_1,d_2 是其论域范围，其语言变量为{负大，负中，负小，零，正小，正中，正大}，记为 $\{NB,NM,NS,Z,PS,PB\}$，然后通过离线实验来得到 $\mathbf{p}_i$ 的隶属度。根据定义 1 可知，(4)式的向量范数为：

$$\|\Delta q(k)\|=\{[x_d(k)-x_p(k)]^2+[y_d(k)-y_p(k)]^2+[\theta_d(k)-\theta_p(k)]^2\}^{1/2}\tag{24}$$

由于轨迹跟踪控制是通过不断进行迭代学习来逼近期望轨迹的，而迭代次数并不好确定，目前关于这方面的相关研究都是采用试探的方法。如果能根据某种指标来确定迭代次数，那么无疑会减少许多计算量，降低运算复杂度。本文根据实验和以往的专家累计经验，以状态向量误差 $\Delta\mathbf{q}$ 的范数为指标即(24)式，当达到其阈值 $b_{\Delta q}$（$b_{\Delta q}$ 是常数，由实验和经验得到)，就可以认为 $p_d(k)$ 已经逼近了，其流程图如图 2 所示：

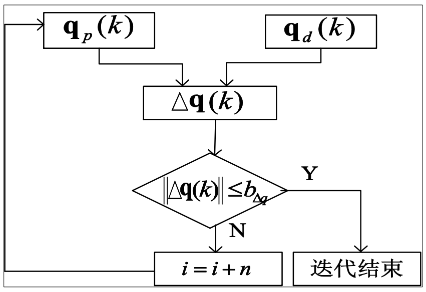
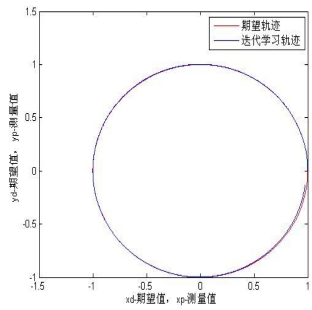


图 2　迭代学习流程图

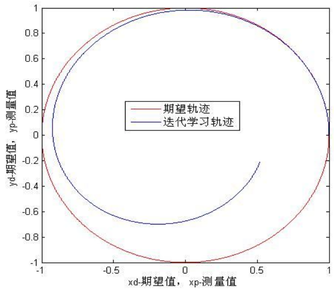
其中 n 为每次迭代次数的增量，是一个常数。

4　实验和仿真

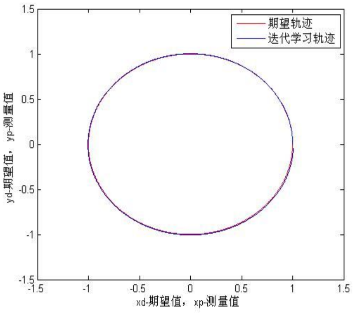
通过上文的策略设计，下面用实验来验证。对机器人离散系统(6)进行仿真，假设每次迭代被控对象初始值与期望值相同，即 $x_{i,p}(0)=x_d(0)$，$y_{i,p}(0)=y_d(0)$，$\theta_{i,p}(0)=\theta_d(0)$，采用(8)式的学习规律。期望位置为 $x_d(t)=\cos\pi t$，$y_d(t)=\sin\pi t$，$\theta_d(t)=\pi t+\pi/2$，可以看出其期望轨迹是一个圆；取 $L_1=L_2=\begin{bmatrix}\cos\theta(k) & \sin\theta(k) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，采样时间 ΔT =10ms，初始迭代次数为 50；每次迭代时间为 2000 次[11]。图 3 为不同迭代次数下的仿真图，可以看出大约迭代 150 次时获得较满意的结果,而传统的迭代次数在 180 次左右才能得到较满意的结果，且误差收敛时间也减小了[12]。图 4 为状态误差随迭代次数变化收敛的仿真图，可以看出随仿真次数增加其误差不断减小，大概迭代 150 次时获得较为满意结果。



(a)　i=50 迭代次数



(b) i=100 迭代次数



(c) i=150 迭代次数

图 3 不同迭代次数轨迹跟踪图

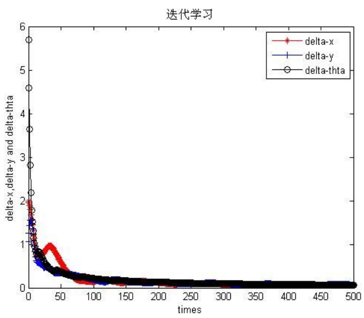


图 4 轨迹跟踪状态误差收敛图

5 结语

本文提出了基于迭代学习的轨迹跟踪的学习控制率，从仿真可以看出，取得了较好的效果。结合实际参加的全国机器人大赛，并把本文策略应用到江南大学 AF 机器人中去，并在 2008 年和 2010 年取得了优异的成绩。

参考文献

1 Suguru Arimoto.Mathematical Theory of Learning with Applications to Robot Control. Proc. of 4th Yale Workshop on Applications of Adaptive Systems. New haven, 1985: 379–388.

2 Owens DH, Iterative learning control-an optimization paradigm. Annual Reviews in Control,2005,37:1099–1121.

3 Taybi A, Model reference adaptive iterative learning control system. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2006,20(9):475–489.

4 Madady A. A model reference adaptive iterative learning control system. The 32th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society, Paris, 2006:627–632.

5 许顺孝,杨富文.迭代学习控制的研究与进展,厦门大学学报, 2001,40(1):46–49.

6 徐进学,吴海,等.基于内模的机器人迭代学习控制.机器人, 1998,20(6):401–403.

7 李玉忍,张林,等.迭代学习在 PID 中的应用,2008,28(6):5–8.

8 姚仲舒,王宏飞,等.一种机器人轨迹跟踪的迭代学习控制方法,兵工学报, 2004,25(3):330–334.

9 回立川,林辉.一种新型的迭代学习控制器的设计研究,计算机仿真, 2009,26(3):333–335.

10 蔡自兴,贺汉根,等.未知环境中移动机器人导航控制理论与方法.科学出版社, 2009:429–432.

11 刘金琨.机器人控制系统的设计与 MATLAB 仿真[M].清华大学出版社, 2008:323–333.

12 阎世梁,张华,等.极坐标下基于迭代学习的移动机器人轨迹跟踪控制.计算机应用，2010,30(8):2017–2020.