双变量 EMD 分析的平面离散曲线光顺方法①

谭小俊，杜轶诚，秦绪佳

(浙江工业大学 计算机科学与技术系，杭州 310032)

摘　要：曲线的光顺在计算机辅助设计及其相关制造业中都有着重要作用。通过把平面离散曲线当作非平稳信号来处理，提出了一种双变量经验模式分解(EMD)的平面数字曲线光顺方法。方法首先将平面数字曲线的各个变量分离，参数化为两个一维信号；然后运用一维 EMD 方法对一维化的信号进行滤波处理，去除高频噪声；最后对两个处理好的信号进行合成，得到光顺后曲线。采用端点对称延拓的方法消除分解过程中边界效应，从而得到光顺的平面数字曲线。实验结果表明，该方法具有对二维双变量平面曲线有较好的平滑效果。

关键词：平面离散曲线；经验模式分解(EMD)；光顺；双变量

Bivariate EMD Analysis Method for Discrete Plane Curve Smoothing

TAN Xiao-Jun, DU Yi-Cheng, QIN Xu-Jia

(School of Electronic Science and Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China)

Abstract: Curve smoothing plays an important role in both Computer Aided Geometric Design and related manufacturing industries. In this paper, considering discrete digital curve is looked as non-stationary signal, a novel method of filtering discrete digital plane curves based on Bivariate Empirical Mode Decomposition (EMD) is presented. Firstly, separate the variables of the discrete plane curve, and parameterize them into two one-dimensional signals. Secondly, use the method of EMD to filter and remove the high-frequency noise of each one-dimensional signal. Finally, obtain the smoothing curve by combining these two processed one-dimensional signals. Meanwhile, in order to eliminate the boundary effect caused of the process of EMD, the method of symmetric extension of endpoints is proposed. The results of experiment show that the new method is effective while smoothing the bivariate discrete plane curve.

Key words: discrete plane curve; empirical mode decomposition(EMD); smoothing; bivariate

1　引言

在计算机辅助几何设计（CAGD）中，曲线曲面光顺一直有着较为重要的应用。特别是在汽车、船舶、航空航天、仪器仪表等对精度和外观都要求较高的设计制造业中。光滑的器件表面无论是基于美观考虑还是对性能的再提升都是更好更优越的。在设计过程中用到的数据经常会受到外部因素或技术条件制约等一系列问题导致误差，进而产生不规则的扰动。因此有必要滤波（光顺）以去除这些干扰。

这里我们研究更为基础的平面曲线的光顺方法。光顺法以每次修改型值点数量的不同可分为局部光顺法和整体光顺法。局部光顺法即为每次修改少量型值点，如节点插入与删除[1]、Kjellander 法[2]等；整体光顺法则是每次都对全部型值点作修改，如典型的能量法[3]。在光顺时用整体的方法处理连续坏点以及持续的噪声效果显著，但常规方法由于一次要修改全部点，数据量大时计算十分缓慢。由于离散信号与平面数字曲线的相似性，可以把平面数字曲线运用信号处理方法来分析。对于平稳的信号，可由傅里叶变换做出较好的分析，但考虑到平面曲线的一般性，它只能被当

① 基金项目:国家自然科学基金(61075118,60673063),国家科技支撑计划(2007BAH11B02),浙江省自然科学基金(Y1080436,Y1100880);浙江省科技计划(2009C31106)

收稿时间:2011-02-10;收到修改稿时间:2011-03-08

作非平稳信号，用短时傅里叶变换[4]、小波分析[5,6]、Wigner-Ville 分布[7]、Gabor 展开[8]等基于傅里叶变换的改进方法来处理。这些方法都在不同程度上改进了傅里叶变换，使其能够处理非平稳信号，但都无法从根本上克服傅里叶变换在分析信号上的弊端。一种新的处理非平稳信号方法——经验模式分解（EMD：Empirical Mode Decomposition）的提出改变了这种局面，它首先由 Huang[9]于 1998 年提出的。该方法能有效的将信号分解成一系列不同频率的内蕴性模式函数（IMF），从而把有用信号和噪声区分开来。基于经验模式分解的数字曲线光顺方面，秦绪佳等[10]采用构造近似均值曲线并依均值曲线将原曲线进行一维参数化的方法，该方法可获得较好的光顺效果，但参数化过程复杂。

本文将平面数字曲线当作离散的非平稳几何信号，将双变量平面信号沿 x、y 方向分解成两个一维信号，通过 EMD 分析方法滤除曲线中的高频锯齿波使其产生一条光滑的曲线以替代原曲线。同时为克服 EMD 方法在处理曲线边界时所产生的失真，提出了对原曲线作端点对称延拓的方法增加曲线长度而把失真排除到有效曲线外。本文第 2 节简要分析一维 EMD 分析方法的原理，第 3 节介绍平面离散曲线的双变量 EMD 分析及边界效应的消除方法，第 4 节给出了实验结果及分析，最后是全文总结。

2　一维EMD分析原理

经验模式分解可以把复杂的数据信号分解成若干个不同频率信号分量。除去剩余分量每一个信号分量即为一个内蕴性模式函数（IMF）[9-11]，每个 IMF 都应满足:1)在整个区域内，过零点个数与极值点个数相等或者差一；2)对于其上任意点，由局部极大值和极小值定义的包络均值为零。

对原始信号 $X(t)$ 的 EMD 分解过程如下：

1) $R_0 = X(t)$ 作为分解的初始数据；

2) 求信号 $X(t)$ 的第 j 个 IMF 分量，如下：

a) $h_{i-1} = R_{j-1}$ ，$i=1$；(h_i 为求取 IMF 分量过程中的中间变量)

b) 求出 h_{i-1} 的极大值序列和极小值序列，插值拟合其上包络 $e_{\max}$ 和下包络 $e_{\min}$ 并计算均值 $m_{i-1} = (e_{\max} + e_{\min})/2$；

c) 更新结果，$h_i = h_{i-1} - m_{i-1}$；

d) 用两个连续结果计算标准偏差 SD：

$$SD = \sum_{t=0}^{T}\left[\frac{\left|h_i(t) - h_{i-1}(t)\right|^2}{h_{i-1}(t)}\right] \tag{1}$$

这里假设选取的信号时段从 $t=0$ 到 $t=T$ ；

e) 假如 $SD > \varepsilon$ ，$i = i+1$ ，返回(b)；相反，$SD \le \varepsilon$ ，则 $C_j = h_i$ 即为原信号 $X(t)$ 的第 j 个 IMF 分量；

3)计算剩余分量 $R_j = h_{i-1} - C_j$ ，如果 R_j 变为单调函数而无法再次提取 IMF 或者 R_j 的值很小而无实际应用价值时，停止对其进行再次分解；否则返回步骤 2)继续对其提取第 $j+1$ 个 IMF。

最终信号可表示为下式形式：

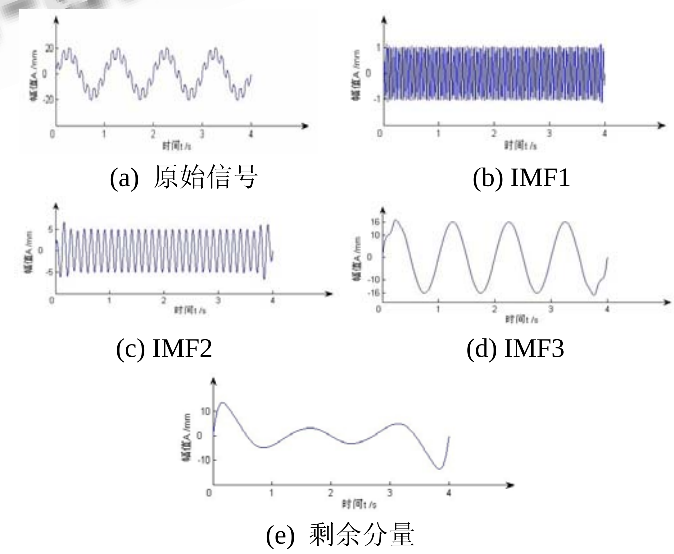
$$X(t) = \sum_{j=1}^{N} C_j + R_N \tag{2}$$

（这里 N 表示 EMD 的分解次数，可以人为控制分解次数来达到所需要的效果。）

本文我们以下面仿真信号的 EMD 分析过程加以说明：

$$f(t) = a\sin(2\pi\alpha t) + b\sin(2\pi\beta t) + c\sin(2\pi\gamma t) \tag{3}$$

可以看出式（3）中的仿真信号是由三个正弦信号叠加而成的。取 $a=16mm$ ，$b=5mm$ ，$c=1mm$ ，$\alpha=1Hz$ ，$\beta=8Hz$ ，$\gamma=24Hz$ ，用 500Hz 的采样频率对信号进行采样。运用 EMD 对信号分析后分解得到各内蕴模式分量如图 1 所示。图 1(a)为原始仿真信号，图 1(b)、1(c)和 1(d)分别表示对信号进行一次、二次、三次分解后所得到的内蕴模式分量，图 1(e)为分解后的剩余分量。



(a) 原始信号　(b) IMF1

(c) IMF2　(d) IMF3

(e) 剩余分量

图 1　仿真信号的 EMD 分解

由图 1 中 EMD 对于仿真信号的分解结果可知，EMD 方法能很好的分离出复杂信号中各个不同频率的组成分量，有助于我们对其中个别分量的研究。

3 平面离散曲线的双变量EMD光顺

对于平面离散曲线，由于其有 x、y 两个变量，因此在用 EMD 方法进行分解前需要将该曲线一维参数化展开成两个一维信号。然后分别对每个变量一维信号序列进行 EMD 分析，去除其中相对频率较高的内蕴模式分量（即噪声），最后将处理后的一维信号逆映射回二维，得到光顺后的平面曲线。

3.1 平面曲线沿 x，y 方向的一维参数化

平面数字曲线沿 x，y 的一维参数化步骤如下：

1) 首先对平面曲线建立直角坐标系，则数字曲线上的离散点可表示为 $P_i(x_i, y_i)$， $i=1,2,\cdots$ 。

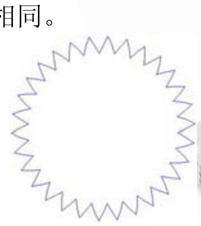
2) 在上述基础上，对曲线上的离散点 $P_i(x_i, y_i)$ 进行变量分离。从而得到两组点序列 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ，$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$， $n=1,2,\cdots$ 。

我们以在圆的基础上加规则扰动的数字曲线为例，原始曲线如图 2(a)所示，其沿 x，y 的一维参数化步骤如下：

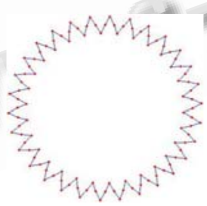
1) 以曲线质心为坐标原点建立直角坐标系，曲线最右边的点为第一个点，按逆时针方向标注离散点，使其形成离散点列。如图 2(b)所示。

2) 对该离散点列进行变量分离，分别得到 x 轴序列和 y 轴序列，如图 2(c)和 2(d)所示。

对于任意平面离散曲线，其一维参数化方法与此相同。

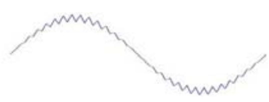


(a)原始曲线



(b)顺序排序离散点采样

(c)对应 x 轴序列



(d)对应 y 轴序列

图 2 平面曲线的一维参数化

3.2 平面数字曲线 EMD 光顺方法

得出原始曲线沿 x，y 向的一维参数化后，即得到两个一维数字信号。然后即可对数字曲线进行光顺处理。其具体步骤如下：

1) 利用上节的方法对原始信号进行一维参数化。

2) 对两组离散信号序列分别进行 EMD 分解。

3) 分别去掉一次分解得出的 IMF。

4) 将处理好后的两个一维序列以对应方式逆映射回直角坐标系，得到光顺后的数字曲线。

以上小节与圆同构的曲线为例，在得到离散后的 x，y 一维化序列后，对其分别进行 EMD 一次分解，如图 3(a)和 3(b)。去除分离出的高频 IMF 噪声分量，得到平滑的一维光顺曲线，如图 3(c)和 3(d)。最后把处理后的一维离散序列映射回二维直角坐标系，从而得到较为光滑的数字曲线，如图 3(e)。

(a) x 轴序列 EMD 一次分解

(b) y 轴序列 EMD 一次分解

(c) x 轴序列处理结果

(d) y 轴序列处理结果

(e)光顺后的曲线

图 3 简单平面曲线的 EMD 光顺过程

由图 3(e)可以看出，经过 EMD 滤波处理，高频分量得到有效滤除，曲线变得光顺。但是在我们进行一维展开的接合处出现了较大的失真。这是由于 EMD 分析方法存在边界效应[9]。边界效应产生的原因是因为在边界处极值点估计不准确，从而使得由极大值和极小值包络得到的均值不准确。关于一维 EMD 分析方法的边界效应的消除方法，已有许多学者进行了深入研究，提出了一些非常有效的处理方法[12-14]。

3.3 边界效应的消除方法

EMD 方法中最重要的环节是用三次样条插值基于曲线的极大值或极小值点拟合出曲线的上包络曲线

以及下包络曲线。而在曲线的边界处，由于缺少确定的极大值和极小值点无法对曲线两端的插值条件做更好的约束，因而拟合出的曲线不一定是实际情况下准确的包络曲线。这就会导致边界效应的形成。这种扭曲在曲线两端比较明显，随着分解的深入，扭曲会向内部延伸，造成更大的误差。

以图 4 所示曲线为例，取曲线在图中两竖线中的一段分析，实线为仅对所截曲线极值点拟合的上下包络线，虚线为加入了曲线两端部分约束而成的实际包络线。这里明显可看出无端点约束的拟合包络线在两端扭曲严重。

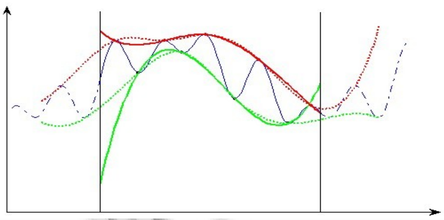


图 4　无延拓包络与实际包络的边界对比

对于曲线边界效应的处理总体上可分为两种：曲线延拓法和端点处极值预测。曲线延拓就是通过现有曲线规律延长曲线长度，从而把边界效应产生的失真排除出去。其中曲线的延拓法主要有：极值点对称延拓法、自回归模型（AR 模型）延拓法、镜像闭合延拓法等。端点处极值预测就是通过现有曲线极值点规律预测出端点处的极值点来约束包络线的拟合。但是由于端点处极值预测方法较为复杂，而且对于不同曲线，需要采用不同的极值点预测参数，不具有通用性。

这里，将介绍一种新的曲线延拓方法：端点对称延拓法。即把曲线一端若干个点关于端点做点对称来延拓曲线，并把延拓后的部分加入原始曲线形成新的曲线，然后对延长了的曲线做 EMD 分解，分解后对多余的部分再予以去除。这种方法在拟合曲线的上下包络线时由于受到两端延拓部分的约束而不会有太大的扭曲。如图 5，是对原始曲线进行端点对称延拓的效果图。其中，实线为原始曲线，虚线为对曲线做端点延拓的部分。

当然，要完全消除边界效应是不可能的，也是任何一种方法所无法达到的。端点对称延拓法由于只要对曲线两端部分做端点对称，因此计算速度快且不影响原分解的计算过程。同时，该方法具有通用性，对于不同的曲线都可以适用，无需作改变。

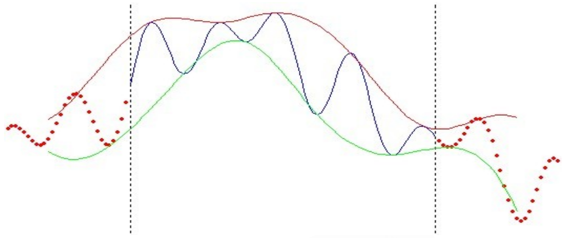


图 5　边界延拓处理

用端点对称延拓法对 3.2 节中的例子加以改进后，得到效果如图 6 所示。从图上可以看出，在未经过边界处理的曲线光顺图 2(f)中明显的边界扭曲已被基本消除，处理后的曲线光顺效果明显。

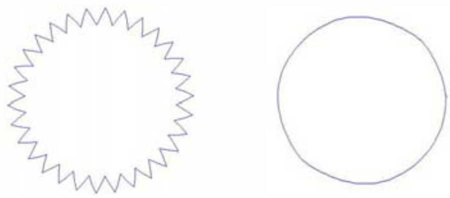
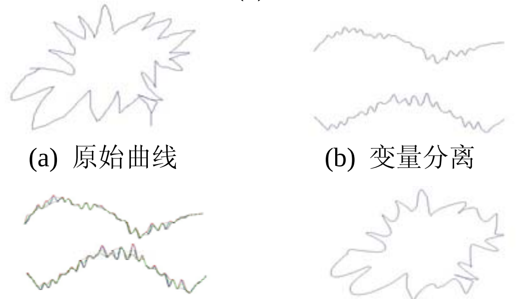


图 6　在消除了边界效应后的 EMD 分解对比效果图

4　实验结果与分析

1) 对于封闭曲线的 EMD 光顺过程如下图 7 所示。首先建立直角坐标系，对曲线的离散点顺序采样，分离采样得到的离散点列，即完成曲线沿 x，y 的一维参数化，如图 7(b)。然后分别对离散的序列进行 EMD 分解，去除分解出的噪声分量，如图 7(c)。最后把处理过后的一维光顺序列映射回二维坐标系，得到最后光顺的离散平面曲线如图 7(d)。



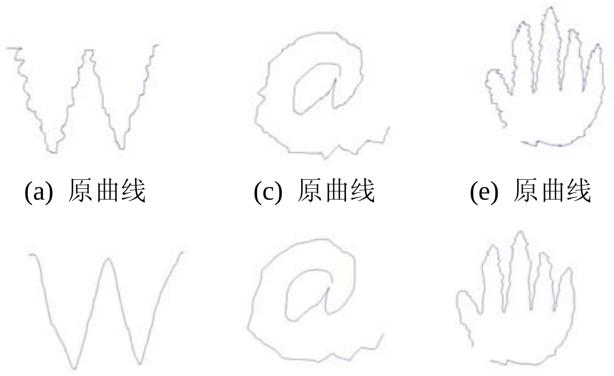
(a) 原始曲线　　(b) 变量分离

(c) 分别进行 EMD 分解　　(d) 光顺后的曲线

图 7　封闭曲线的光顺效果图

2) 对于任意平面曲线的 EMD 光顺效果由图 8 所示，方法与封闭曲线的光顺过程相同。图 8(a)、8(c)

和 8(e)是原始曲线，图 8(b)、8(d)和 8(f)则为相对应的光顺处理后的光顺曲线。



(a) 原曲线　(c) 原曲线　(e) 原曲线

(b)光顺后曲线　(d)光顺后曲线　(f)光顺后曲线

图 8　任意曲线的光顺效果图

从上述实验结果可以看出，加入了对边界的处理，EMD 方法已能胜任对任意曲线的光顺处理，并在保持了曲线原有变化趋势的基础上取得了比较好的效果。为了避免去除曲线上的有用特征信息，本文仅去除了一次 EMD 分解所得到的 IMF。对于含有不同频率的杂波干扰的平面曲线，可以根据需要进行多次 EMD 分解，在取得了多个 IMF 分量后，去除干扰 IMF 以获得相对更好的光顺曲线。不过在用该方法去除干扰噪声波的同时，也一并去除了一些可能的有用特征信息。因此分解次数也不是越多越好，可以根据实际情况选择相应的分解次数。

5　结论

本文运用了 EMD 方法对平面曲线进行光顺处理。提出使用端点对称延拓法来解决 EMD 分解中的边界效应问题，该方法在处理封闭曲线时取得了比较良好的效果，而对于更为一般的非封闭曲线也取得了较好效果，其通用性毋庸置疑。端点对称延拓法通过增加曲线自身点的对称点进行延拓，只加入了少量运算，不影响原 EMD 分解的运算速度和运算过程，且避免了在引进预测点时可能带入的不确定因素。就处理效果而言，此方法已能有效的抑制边界效应。

参考文献

1 Farin G, Rein G, Sapidis N, et al. Fairing of cubic B-spline curves. Computer Aided Geometric Design, 1987,4(2):91–103.

2 Kjellander JAP. Smoothing of cubic parametric spline. Computer Aided Design, 1983,15(3):175–179.

3 吴维勇,王小椿.自由曲线局部光顺的分层能量算法.计算机辅助设计与图形学报,2002,14(10):63–65,70.

4 边海龙,光福.基于短时傅里叶变换检测非平稳信号的频域内插优化抗混叠算法.仪器仪表学报,2008,29(2):284–288.

5 何坤,李建,乔强,周激流.非平稳环境下基于小波变换的信号去噪.信号处理,2005,21(3):244–248.

6 任震,张征平,黄雯莹,管霖,杨楚明,胡国胜.基于最优小波包基的电动机故障信号的消噪与检测.中国电机工程学报,2002,22(8):53–57.

7 王忠仁,林君,李文伟.基于 Wigner-Ville 分布的复杂时变信号的时频分析.电子学报,2005,33(12):2239–2241.

8 陶亮,庄镇泉.实值离散 Gabor 变换块时间递归算法的并行格型结构实现方法.电子学报,2002,30(10):485–489.

9 Huang NE. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. Proc. Roy Soc London A. 1998,454(4):903–995.

10 秦绪佳,盛柯芳,徐晓刚.基于经验模式分解的数字曲线光顺算法.中国机械工程,2007,18(6):715–718.

11 徐晓刚,徐冠雷,王孝通,秦绪佳.经验模式分解(EMD)及其应用.电子学报,2009,37(3):581–585.

12 杜陈艳,张榆锋,杨平,石岩岩,杨皖君.经验模态分解边缘效应抑制方法综述.仪器仪表学报,2009,30(1):55–60.

13 盖强,马孝江,张海勇.一种处理局域波法中边界效应的新方法.大连理工大学学报,2002,42(1):115–l17.

14 邓拥军,王伟,钱成春.EMD 方法及 Hilbert 变换中边界问题的处理.科学通报,2001,46(3):257–263.