

一种基于偏微分方程的图像超分辨率方法^①

李 乐 赵凤群 (西安理工大学 理学院 陕西 西安 710054)

摘 要: 在图像超分辨率方法中, 经典插值方法存在块状效应和图像模糊的情况, 而以经典插值方法为基础, 用偏微分方程进行后处理的方法则较为复杂。运用各向同性方程与各向异性方程进行耦合得到了一个新的偏微分方程模型, 用该模型对图像进行超分辨率处理, 既降低了计算复杂度, 又能保证得到较好的图像超分辨率效果。实验结果表明了本文方法的优越性。视觉感知具有良好的 consistency。

关键词: 图像超分辨率; 偏微分方程; 耦合

Image Super-Resolution Method Based on Partial Differential Equation

LI Le, ZHAO Feng-Qun (Department of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: In Image super-resolution methods, the classical interpolation methods have checkerboard effect and image blur. Using the partial differential equations with the post-processing is more complicated. In this paper, it is proposed to obtain a new PDE model which is coupled between isotropic and anisotropic partial differential equations. This model is processed for image super-resolution. It does not only decrease computational complexity, but also ensures a better image super-resolution effect. The experimental results show the advantages of this method.

Keywords: image super-resolution; partial differential equation; coupling

1 引言

随着科学技术的发展, 数字图像超分辨率技术在现实生活中得到了十分广泛的应用。插值方法作为数字图像超分辨率中最常用的方法, 在早期得到了广泛的运用, 如最近邻插值、双线性插值等, 它们具有较短的运算时间、容易被理解等优点。但随着计算机、网络与数字电视的发展, 以及人们对图像更高的要求, 这些方法所具有的阶梯状边缘和纹理结构模糊等缺点也凸显出来。高分辨率插值方法包括三次样条、三次 B 样条插值方法、Newton-Thiele 插值方法以及 Bézier 插值曲面插值方法^[1-4]等, 这些插值方法虽然具有很多优越性, 但由于它们都是局限在依靠较光滑的函数来逼近原图像的固定方式, 这会在进行图像超分辨率的倍数较高时形成斑点以及明暗区域偏移现象, 而且随着倍数越大, 这种现象越明显。随后人们对插值方法进行了各种改进, 如 Shengyang Dai^[5]等主要是

针对多密度层的图像边缘运用阿尔法通道进行改进, 虽然有明显的效果, 但运算时间较长, 从而降低了该方法的实用性。

随着偏微分方程理论的不完善, 运用偏微分方程进行图像超分辨率的方法越来越多。主要有直接运用偏微分方程进行图像超分辨率处理和对超分辨率图像进行后处理两类方法。如朱宁等人运用各向同性热传导方程直接进行图像超分辨率处理^[6], 该方法处理速度快, 但在处理过程中对图像边缘没有进行单独处理, 使得图像边缘出现了模糊的情况; 第二类方法主要是先对原始图像进行插值处理, 再运用偏微分方程对超分辨率处理后的图像进行修正。如 Fu 和 Ruan 等人利用模糊自适应的思想构造了新的方程对用经典插值方法放大的图像进行后处理, 明显改进了经典插值方法阶梯状边缘的效果^[7]; 袁建军和朱宁对各向异性的偏微分方程进行改进, 并运用改进方程对双线性插值超分辨率图

^① 收稿时间:2010-01-10;收到修改稿时间:2010-03-12

像进行修正,得到了更好的图像效果^[8];艾娜等人利用自蛇模型(self-snake model)对双线性插值超分辨率图像进行修正,降低了图像中的边缘模糊和阶梯状效果^[9]。相对于第一类方法,第二类方法增加了处理的复杂性,并且构造的偏微分方程只是针对某一种插值方法进行修正,存在一定的局限性。

由于各向同性偏微分方程能够较快的进行能量扩散,各向异性偏微分方程能够运用边缘停止函数对图像边缘进行强化,所以本文利用这两种方程的优点,耦合两种方程得到一个新的非线性偏微分方程,直接利用该模型,进行图像超分辨率处理,得到了满意的效果。

2 图像超分辨偏微分模型

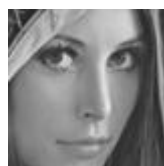
2.1 模型的建立

文献[6]给出了各向同性偏微分方程图像放大模型如下:

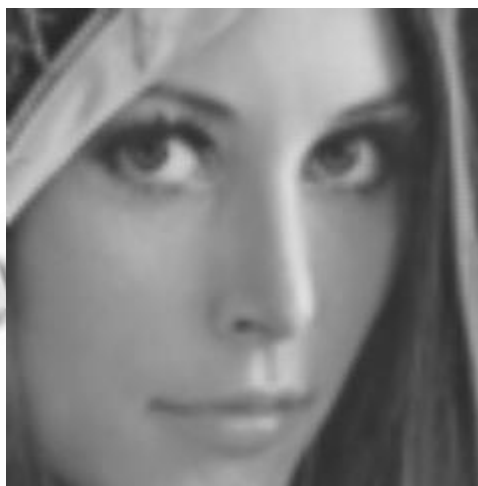
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (1)$$

该模型可称为热传导模型,其中 t 是时间, Δu 为 Laplace 算子,将二维平面图像 u 中的点 $u(i, j)$ 看作是平面物体的温度分布,假设需要放大 3 倍,这时可根据原始图像的大小和放大倍数,确定放大后区域的大小,由于放大后区域需要多次迭代才可以使整个图像中的温度均匀分布即达到平衡,因此引入时间来刻画迭代次数。将模型运用五点差分格式进行离散,能够很好的对图像进行扩散,当平面温度分布达到平衡时,整个处理过程就完成了,但由于是各向同性扩散,在图像边缘区域,当迭代次数过多时放大图像在边缘区域会显得有些模糊,如图 1(b)为该模型迭代 40 次的实验结果,可以看到,在图像的帽檐边缘部分出现了模糊的情况。

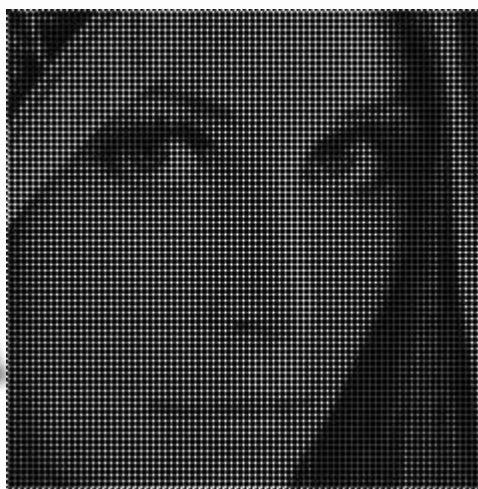
而各向异性扩散方程,虽然在处理时能够保持图像边缘的特性,但由于扩散的速度较慢,需要更长的运算时间,因此这一类方程通常用于进行插值超分辨率处理,直接进行超分辨率处理效果不好,如图 1(c)就以 Perona-Malik 方程(P-M 方程)模型为例,直接进行超分辨率处理,迭代 100 次的实验结果。可以看到,经过了 100 次的迭代,图像中还有些区域的像素值较低,而且整幅图像效果很差。



(a)原始图像



(b)文献[6]迭代 40 次实验结果



(c)P-M 方程迭代 100 次结果

图 1 lena 实验结果图像对比

通过对各向同性方程和各向异性模型优缺点的分析,为了结合两个模型的优点,进一步改进直接进行超分辨率处理的模型,本文提出以下图像超分辨的偏微分方程模型:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (2)$$

其中 Δu 表示 Laplace 算子, ∇u 表示图像的梯

度, $|\nabla u|$ 是梯度的模, $\text{div}(\cdot)$ 是散度算子, t 是时间, u 表示放大后的区域, 第一项的作用主要是对图像进行快速扩散, 在处理过程中, 以原始图像的像素值为能量源点, 通过 Δu 能够将能量从能量源点辐射到整个图像区域。第二项主要作用是对图像边缘进行增强, 它来源于文献[9]中的模型, 通过梯度的控制来锐化图像的边缘, 以降低第一项对图像边缘扩散所带来的模糊效果。

2.2 算法流程

模型(2)实现图像超分辨方法如下:

step1: 从图像中提取需要进行超分辨的区域, 并记为原始图像 $I(m, n)$, 同时初始化超分辨区域 u^0 , 即 $u^0 = 0$ (表示一张黑色的图像); 其中 m 和 n 分别表示原始图像分辨率的水平和竖直大小。

step2: 当 $k = 0$ 时, 利用函数 $C(k)$, 对 I 进行补充, 并代入 u^k 中, 方法为:

$$u^k(p \cdot i, p \cdot j) = C(k) \cdot I(i, j) \quad (i = 1 \mathbf{K} m, j = 1 \mathbf{K} n) \quad (3)$$

通过上式代入 u^0 中替换相应的点后, 得到更新后的矩阵 u^0 ;

step3: 将 u^0 运用模型(2)式的离散格式进行处理一次, 得到 u^1 , 它为该方法进行迭代的初始图像;

step4: k 从 1 开始, 运用(3)式, 不断更新 u^k 中相应的值, 得到更新后的矩阵 u^k 之后, 再运用模型(2)式的离散格式进行迭代, 得到 u^{k+1} , 如此反复进行第四步, 直到 $k = N$ 为止。

在上述算法中, $I(i, j)$ 表示原始图像的像素值, $u^k(i, j)$ 表示超分辨第 k 次迭代中的区域像素值, p 为超分辨倍数 ($p \neq 1$), N 为总的迭代次数, k 为记录迭代进行的次数, 函数 $C(k)$ 的表达式如下:

$$C(k) = \max(1, p - \frac{k \cdot (p-1)}{N}) \quad (4)$$

运用模型(2)式的离散格式进行处理时由于要进行图像超分辨处理, 来自于原始图像的能量需要进行补偿, 因为进行处理的过程中在超分辨区域原始图像点附近八个方向均存在了 $(p-1)$ 个能量为 0 的点, 因为这些点在原始图像点附近, 最终目标是使它们的能量达到与能量源相近的能量, 所以这样的设置有利于能量能够在迭代过程中不断送到那些点, 同时原始图像点的能量能够保持不变。

2.3 模型的离散

令 $u_{i,j}^k$ 为图像迭代至第 k 步在图像中 (i, j) 点的

像素值, t 表示时间, Δt 表示时间步长。

为了构造图像超分辨迭代格式, 首先, 对方程(2)左端关于时间的偏导数用向前差商进行离散, 使得迭代过程中前后两幅图像建立关联:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j}^k \approx \frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (5)$$

为了提高方程离散的精度, 对方程(2)右端采用九点差分格式[10]进行离散。右端第一项 Laplace 项的九点差分格式为:

$$\Delta u_{i,j}^k \approx S_1 = \frac{1}{3}(u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k) + \frac{1}{3}(u_{i+1,j+1}^k + u_{i-1,j+1}^k + u_{i+1,j-1}^k + u_{i-1,j-1}^k - 4u_{i,j}^k) \quad (6)$$

右端第二项中第一个因子是梯度的绝对值, 可采用如下的离散方法[11]:

$$|\nabla u|_{i,j}^k \approx T = \sqrt{[\min(u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k, u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k)]^2 + [\min(u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k, u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k)]^2} \quad (7)$$

第二个因子是散度, 可采用如下的离散方法[12]:

$$\text{div}\left(\frac{\vec{u}_x \vec{i} + u_y \vec{j}}{|\nabla u|}\right)_{i,j}^k \approx S_2 = g(t_1)(u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k) - g(t_2)(u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) + g(t_3)(u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k) - g(t_4)(u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k) \quad (8)$$

其中函数 $g(|\nabla u|) = \frac{1}{|\nabla u|}$ 是边缘停止函数, t_1, t_2, t_3, t_4

参看(10)式, 为了防止在分母上的梯度值为零, 在离散格式中给分母上添加一个参数 $e (e > 1)$ 。这时函数 $g(|\nabla u|)$ 形式如下:

$$g(|\nabla u|) = \frac{1}{|\nabla u| + e} \quad (9)$$

而 t_1, t_2, t_3, t_4 分别表示梯度的四种不同方向的离散形式:

$$\begin{aligned}
 t_1 = \left| \nabla u_{i+\frac{1}{2},j} \right| &= \sqrt{(u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k)^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j+1}^k - u_{i+1,j-1}^k}{2} + \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2} \right) \right]^2} \\
 t_2 = \left| \nabla u_{i-\frac{1}{2},j} \right| &= \sqrt{(u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k)^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i-1,j+1}^k - u_{i-1,j-1}^k}{2} + \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2} \right) \right]^2} \\
 t_3 = \left| \nabla u_{i,j+\frac{1}{2}} \right| &= \sqrt{(u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k)^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j+1}^k - u_{i-1,j+1}^k}{2} + \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2} \right) \right]^2} \\
 t_4 = \left| \nabla u_{i,j-\frac{1}{2}} \right| &= \sqrt{(u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k)^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j-1}^k - u_{i-1,j-1}^k}{2} + \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2} \right) \right]^2}
 \end{aligned} \tag{10}$$

上面对 $|\nabla u|$ 采取了不同的离散方式，主要目的包括两个方面：一方面是增大图像边缘锐化程度，另一方面是更快的将能量辐射到整个超分辨率区域。

综上所述模型(2)式的离散格式为：

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Delta t(S_1 + T \cdot S_2) \tag{11}$$

其中 Δt 为时间步长， $u_{i,j}^k$ 为迭代前在点 (i, j) 的值， $u_{i,j}^{k+1}$ 为迭代后在点 (i, j) 的值。

3 实验结果与分析

实验中选取时间步长为，超分辨率倍数为，迭代次数，为了进一步说明本方法的优势，选取一幅梯度变化较大的图像进行试验，如图 2 中，(a)为选取的原始图像，(b)为文献[6]方法迭代 10 次的实验结果，(c) P-M 方程进行实验迭代 10 次的实验结果，(d)为本文迭代 10 次的实验结果。

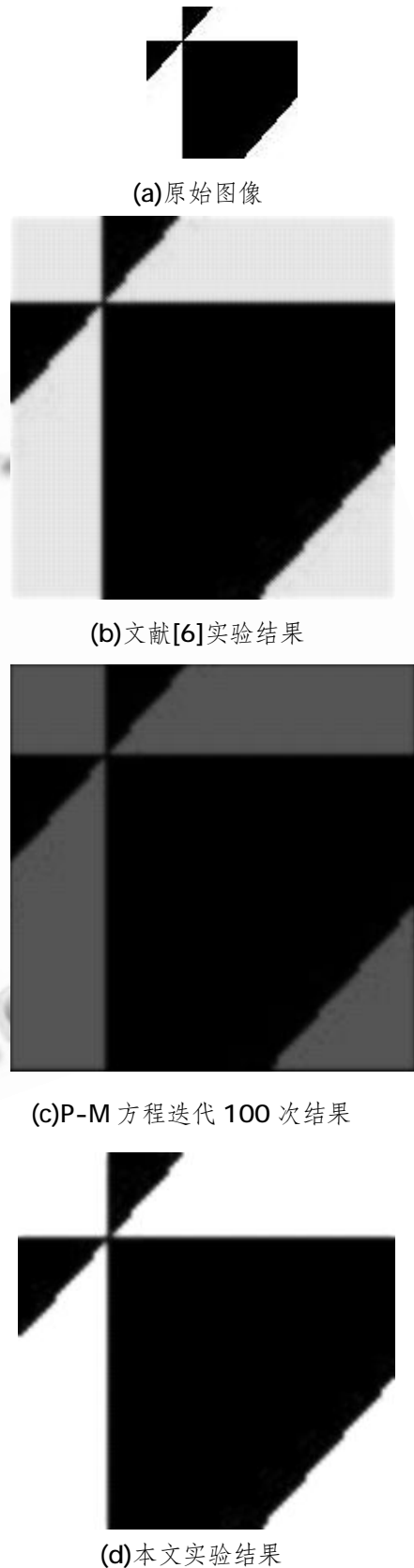


图 2 梯度变化较大的实验结果对比

表 1 各种方法运行时间与迭代次数

	各向同性	各向异性	本文方法
处理时间(秒)	0.5782	0.7950	1.6086
迭代次数	10	10	10

从上面的图表中可以看到,一方面就图像效果而言,图像(d)效果明显优于能够图像(b)和(c),而且在图像边缘上图像(d)没有图像(b)中所具有的柔性边缘(soft edge);另一方面就运算时间而言,由于本文模型比文献[6]和P-M模型复杂,且采用了九点差分格式,所以处理时间比文献[6]模型和P-M模型长。随着人们对图像效果的要求越来越高,以及计算机运算能力的飞速发展,本文方法的优势将会得到更好的体现。

参考文献

- 1 杨朝霞,逯峰,关履泰.用 B 样条的尺度关系来实现图像任意精度的放大缩小.计算机辅助设计与图形学学报,2001,13(9):824-827.
- 2 Durand C X, Faguy D. Rational zoom of bit maps using B-spline interpolation in computerized 22D animation. Computer Graphics Forum, 1990,9(1):27-37.
- 3 孙庆杰,张晓鹏,吴恩华.一种基于 Bézier 曲面的图像放大方法.软件学报,1999,10(6):570-574.
- 4 胡敏,张佑生. Newton-Thiele 插值方法在图像放大中的应用研究.计算机辅助设计与图形学学报,2003,15(8):1004-1007.
- 5 Dai S, Han M, Wei Xu, Wu Y, Gong YH. Soft Edge Smoothness Prior for Alpha Channel Super Resolution. Computer Vision and Pattern Recognition IEEE, 2007,17(22):1-8.
- 6 朱宁,吴静,王忠谦.图像放大的偏微分方程方法.计算机辅助设计与图形学学报,2005,17(9):1941-1945.
- 7 Fu SJ, Ruan QQ, Wang WQ, Chen JN. Feature-Oriented Fuzzy Shock-Diffusion Equation for Adaptive Image Resolution Enhancement. Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, Volume 4223, 2006:874-882.
- 8 袁建军,朱宁.基于各向异性扩散的图像放大法.苏州大学学报,2008,24(3):16-20.
- 9 艾娜,彭进业,王大凯.彩色自蛇模型在图像放大中的应用.陕西科技大学学报,2008,26(3):112-116.
- 10 王大凯,侯榆青,彭进业.图像处理中的偏微分方程方法.北京:科学出版社,2008.
- 11 Wang ZF, Tang YD, Du YK. Noise Removal Based on Fourth Order Partial Differential Equation. The 3rd International Conference on Innovative Computing Information and Control (ICIC'08), 2008:529.
- 12 Nwogu I, Shi ZX, Govindaraju V. PDE-based Enhancement of Low Quality Documents. Ninth International Conference on Document Analysis and Recognition, 2007:541-545.