

# 一种针对特定密度检测的快速FBP算法<sup>①</sup>

杨波<sup>1,2,3</sup> 郑飞<sup>1,3</sup> 郭琦<sup>1,2,3</sup> 孔斌<sup>1,3</sup>

(1.中国科学院合肥智能机械研究所 仿生实验室 安徽 合肥 230027;2.中国科学技术大学 自动化系 安徽 合肥 230031;3.安徽省仿生感知与先进机器人技术重点实验室 安徽 合肥 230031)

**摘要:** 提出了一种针对特定密度检测的快速FBP算法。首先进行不完全数据投影重建,然后依据对密度的先验知识对初步重建图像进行聚类分割,最后找出感兴趣区域来精确重建。文末对该方法进行了实验,并将实验结果和传统FBP算法、几何参数表法做出主观、客观上的比较评价。结果表明,该算法不但能在很大程度上提高传统FBP算法的速度,而且对于感兴趣区域的重建质量上没有影响。

**关键词:** X射线; 图像重建; 滤波反投影; 特定密度; 快速

## A Fast FBP Algorithm for Special Density Detection

YANG Bo<sup>1,2,3</sup>, ZHENG Fei<sup>1,3</sup>, GUO Qi<sup>1,2,3</sup>, KONG Bin<sup>1,3</sup>

(1. Cent for Biomimetic Sensing and Control Research Institute of Intelligent Machines, Chinese Academy of Science, Hefei 230031, China; 2. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China; 3. The Key Laboratory of Biomimetic Sensing and Advanced Robot Technology, Hefei 230031, China)

**Abstract:** A fast FBP algorithm for special density detection is given in this article. At first, reconstruction of image with incomplete data is made. Second, image is clustered and partitioned based on the density known. Lastly, the interesting area can be reconstructed exactly. The results of experiment were compared with FBP algorithm and the algorithm using geometric parameter table at the end of article. The results indicate that the algorithm is not only faster than FBP but also has no effect on the interest area reconstruction.

**Keywords:** X ray; image reconstruction; filter back projection; special density; fast

## 1 引言

计算机断层扫描(CT)技术发展于70年代,至今已广泛地应用于医学、工业领域。其成像算法大致可分为精确算法、近似算法和迭代算法,近似算法中又以滤波反投影算法(Filter back projection, FBP)最具代表性,应用最为广泛。扇束投影CT的FBP算法可以分为3个步骤:投影加权、卷积滤波和加权反投影。FBP算法的运算时间约99%消耗在加权反投影阶段。因此,要提高FBP重建的速度,须减少卷积反投影阶

段的三角函数和浮点乘除的运算<sup>[1]</sup>。国内外学者已经做过了很多这方面的研究<sup>[2]</sup>。如文献<sup>[3]</sup>所提出的查表法,事先将固定的反投影的加权值和反投影的位置以参数表的形式储存起来,计算时再从表中查取。还有文献<sup>[4]</sup>利用对称反投影的特性同时投影几幅图像来提高速度。基本上都是利用运算特点对反投影过程中的程序顺序调整,以及对程序过程优化来提高速度。

而在很多领域中,如毒品爆炸物检测,工业的零部件内部瑕疵检测,往往要求先检测出特定密度的物

<sup>①</sup> 基金项目:国家自然科学基金(10635070)

收稿时间:2009-08-18;收到修改稿时间:2009-09-30

体或区域,然后再对该特定物体或区域进行进一步判断分析。本文中则提出了一种针对特定密度检测的快速 FBP 算法,它针对其使用领域的特殊性,利用了已知检测物体密度的先验特征,对反投影算法做出了改进,实验证明了该算法能在已有的快速算法基础上进一步提高检测的速度。

第一节中对投影重建的基本原理做出简单介绍,并对 FBP 算法进行简单说明。第二节中提出了针对特定密度检测的快速 FBP 实现方法。最后一节中给出实验结果并和经典 FBP 算法以及几何参数表法进行对比和评价。

## 2 投影重建的基本原理及经典FBP算法

### 2.1 投影重建的基本原理

投影重建得以实现的基础是基于 Lambert - Beers 定律:

$$I = I_0 e^{-\mu \cdot \Delta x}$$

式中,  $I_0$  是入射 X 射线强度,  $I$  是出射 X 射线强度,  $\Delta x$  是厚度,  $\mu$  是材料的线性衰减系数,通常  $\mu$  随着 X 射线的能量改变,并因所选材料的不同而不同[5]。

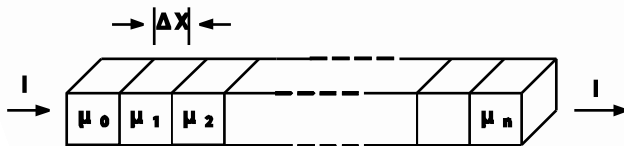


图 1 投影原理图

考虑一个非均匀的物体,如图 1 所示,在数学上,它可以表示如下:

$$I = I_0 e^{-\mu_1 \times \Delta x} e^{-\mu_2 \times \Delta x} e^{-\mu_3 \times \Delta x} \dots e^{-\mu_n \times \Delta x} = I_0 e^{-\sum_{n=1}^N \mu_n \times \Delta x}$$

如果等式两边除以  $I_0$ , 并取负自然对数值,可以得到

$$P = -\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \sum_{N=1}^n \mu_N \times \Delta X$$

上式说明,入射 X 射线与出射 X 射线强度之比经过对数运算后,等于 X 射线路径上衰减系数的线积分。也就是说,只要知道了 X 射线的入射、出射强度,就能够计算出 X 射线路径上衰减系数的线积分,这就给重建提供了依据。

### 2.2 滤波反投影算法

FBP 算法是一种解析重建方法,它的基础是傅立

叶切片理论,如图 2 所示:在某个方向上投影数据的傅立叶变换,等于该图像二维傅立叶变换在相同角度上的斜线。

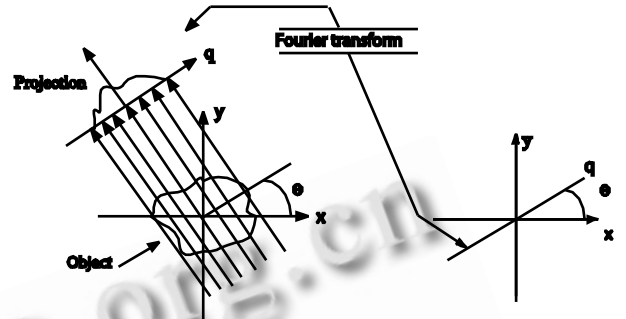


图 2 傅立叶切片理论

基于傅立叶切片理论,只需要获取各个方面的投影数据的一维傅立叶变换,并将它们拼在一起得到整个图像的二维傅立叶变换,然后做二维傅立叶反变换就可以得到重建图像。但是由于傅立叶空间中产生的采样模式不是笛卡儿坐标的,所以投影采样是在极坐标栅格上,为了执行二维傅立叶反变换,这些采样不得被栅格化到一个笛卡儿坐标系中,然而在频率空间的差值会给重建图像造成漂移、伪影等干扰,所以直接的差值傅立叶变换是不可取的。

如图 3 所示,物体的二维傅立叶变换是由许多一维傅立叶变换拼接起来的。由于通过投影采样得到的一维傅立叶变换是长条状,所以拼接的过程必须加权,这个加权的過程就是加权滤波,而整个重建过程,一般称为滤波反投影。

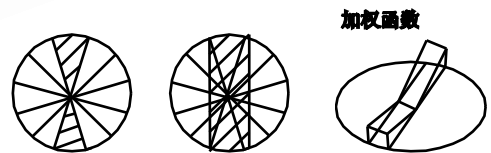


图 3 滤波反投影示意图

## 3 针对特定密度检测的卷积反投影图像重建算法的实现流程

### 3.1 初步的不完全数据投影重建

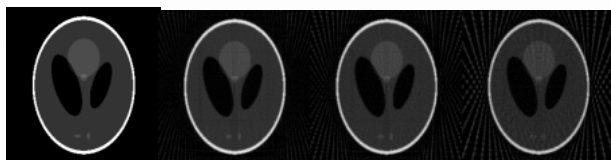
FBP 算法由投影加权、卷积滤波、加权反投影三部分组成,这三部分的运算量分别占总运算量的 0.0016%, 1.6%, 98.36%。反投影算法的时间复杂度主要是由以下两个因素决定的: X 射线源扫描的视

角数  $M$ 、一次采样点数  $N$ 。对于每次扫描的每一个采样点，反投影算法需要将滤波后的投影数据均匀涂抹在扫描线上，如下面的伪码所示，反投影算法的循环次数为  $M \times N \times N$ 。

```

For(视角从 0 到 M)
  For(采样点从 0 到 N)
    For(扫描线上的点从 0 到 N)
      {
        计算当前点(x,y);
        涂抹(x,y);
      }
  
```

由于针对的是特定密度的检测，首先需确定检测物体中的密度范围。由于不同的密度范围通常有着聚类的特性，我们可以先进行初步的不完全数据投影来确定不同密度范围，以便进行进一步处理。如果适当减少反投影的角度，便可减少第一层循环的次数，但是由于有效信息的缺失，图像的质量会有所下降。因此，必须通过实验确定出减少到多少是比较合适的选择。以下是在 360 度范围内分别对用 Sheep-logan 人头断面模型进行的角疏模拟实验以及测评



360 角度 120 角度 90 角度 60 角度  
图 4 不完全角度投影图

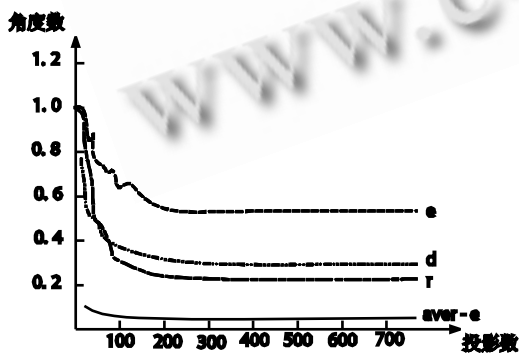


图 5 稀疏角度投影评价图

图 5 中的各图像评价判据分别解释如下<sup>[6]</sup>:

(1) 归一化均方距离判据  $d$ ，即

$$d = \left[ \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{u,v} - r_{u,v})^2}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N (t_{u,v} - \bar{t})^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

式中， $t_{u,v}$ ， $r_{u,v}$ ，分别表示测试模型和重建后图像中第  $u$  行、 $v$  列的像素密度。为测试模型密度的平均值；图像的像素为  $N \times N$  个。 $d=0$  表示重建后图像忠实地再现测试模型图像。 $d$  值越大表示两者偏差越大。

(2) 归一化平均绝对距离判据  $r$ ，即

$$r = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N |t_{u,v} - r_{u,v}|}{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N |t_{u,v}|}$$

$r=0$ ，说明没有误差。 $r$  增大，说明误差增大。

(3) 最大相对误差  $e$ ，即

$$e = \frac{\max_{\substack{1 < u < N \\ 1 < v < N}} t_{u,v} |t_{u,v} - r_{u,v}|}{\max_{\substack{1 < u < N \\ 1 < v < N}} t_{u,v} - \min_{\substack{1 < u < N \\ 1 < v < N}} t_{u,v}}$$

$e=0$ ，说明没有误差。 $e$  增大，说明误差增大。

(4) 平均误差  $aver\_e$ ，即

$$aver\_e = \frac{1}{N \times N} \cdot \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N |t_{u,v} - r_{u,v}|}{\max_{\substack{1 < u < N \\ 1 < v < N}} t_{u,v} - \max_{\substack{1 < u < N \\ 1 < v < N}} t_{u,v}}$$

$aver\_e=0$ ，说明没有误差。 $aver\_e$  增大说明误差增大。

从图 4 中我们可以看到，这几张图的效果越来越差，重建图像的拖尾伪影越来越严重。而从图 5 上的几种客观的评价标准可以看出，从右到左随着投影角度的减少，几种评价准则的评价值越来越大，也就是说重建的质量越来越差。可以看到在投影数约为 100-120 处，从右到左，蓝色、红色、黄色的曲线上上升趋势有个突变，这说明在投影数低于 120 时，投影数减少使得重建图像的效果下降很快，而投影高于 120 时，投影数的减少对重建图像的效果的影响不大。因此，选择 120 投影数进行第一步重建，是比较合适的。同时，在重建中使用了几何参数查找表法，将要使用的三角函数预先计算出来，在重建时直接使用。同时由于角度关系，循环体内三角函数还可重用，可减少循环体内计算时间<sup>[7]</sup>。

### 3.2 对于初步重建图像的基于相对密度聚类分割及区域重建

通过不完全数据投影重建之后,我们得到了初步的重建图像。接下来,根据之前实验已知的先验密度特性,对该重建图像进行图像分割。图像分割主要有阈值法和区域增长法两大类方法。区域增长法可以综合反映灰度分布信息和邻域空间相关信息,其处理效果要好于单纯的阈值法。但是区域增长法实现复杂,运行速度缓慢,不适合需要即时处理的场合。而阈值法是利用灰度频率分布信息进行分割。阈值的选择是该技术的难点,若选择不当,阈值法会产生许多伪迹。但是它具有实现简单的优点,通过设定阈值,留下具有指定灰度的结构并去除其余部分,可以有效地减小计算量,提高运算速度。由于本算法针对的特定密度检测中,具有先验的密度特性知识,速度要求较高,因此,阈值法是比较好的选择。

阈值法的关键和难点是阈值的选择。重建图的各点数据和实际被检测物体的密度既相关又有不同,它反映了各检测物体间的相对密度,但又不能直接体现出物体的密度。由CT而得到的原始投影数据与X光源的功率,光源距物体的距离,物体距投影面距离等均有关联,因此,阈值的选取于所采集数据的CT种类,采集时的参数选取息息相关,在不同设备的情况下,需要针对其不同特点做大量实验来确定其阈值。

接下来采用改进的根据相似性阈值和最小聚类原则的聚类方法进行聚类。其思想是,计算模式特征矢量到聚类中心的距离并和门限比较,决定归属哪类或作为新的一类的中心。去除不符合要求的噪声,最后将相邻类合并。设待分类的模式集为 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,选定类内距离门限 $T$ ,具体步骤如下:

(1) 取检测到的第一个符合特征的像素点作为第一个聚类中心。例如,令 $w_1$ 类的中心 $z_1=x_1$ 。

(2) 计算下一个符合特征的像素点 $x_2$ 到 $z_1$ 的距离 $d_{21}$ 。若 $d_{21}>T$ ,则建立新的一类 $w_2$ ,其中心 $z_2=x_2$ ;若 $d_{21}\leq T$ ,则 $x_2\in w_1$ ,求出 $w_1$ 各元素的最大最小 $x, y$ 坐标值 $x_1\text{Min}, x_1\text{Max}, y_1\text{Min}, y_1\text{Max}$ ,然后由 $x_1\text{Max}-x_1\text{Min}, y_1\text{Max}-y_1\text{Min}$ 得出该类实际坐标中心 $c_1(cx_1, cy_1)$ 。

(3) 假设已有聚类中心 $z_1, z_2, \dots, z_k$ ,计算尚未确定类别的模式特征矢量 $x_i$ 到各聚类中心 $z_j$  ( $j=$

$1, 2, \dots, k$ )的距离 $d_{ij}$ 。如果 $d_{ij}>T$  ( $j=1, 2, \dots, k$ ),则 $x_i$ 作为新的一类 $w_{k+1}$ 的中心, $z_{k+1}=x_i$ ;否则,如果,则指判 $x_i\in w_l$ 。检查是否所有的模式都分划完类别,如都分划完了则结束本步骤;否则返回(3)。

(4) 模式划完之后,将类内元素数量小于阈值 $M$ 的视为噪声去除。计算各类实际中心间距离 $d_{ij}$ ,若有

$$d_{ij} < \sqrt{\left(\frac{x_i\text{Max}-x_j\text{Min}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_i\text{Max}-y_j\text{Min}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{x_j\text{Max}-x_i\text{Min}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_j\text{Max}-y_i\text{Min}}{2}\right)^2}$$

则将两类合并为一类,重新计算该类最大最小坐标值以及实际中心值,重新返回到(4),直到无法合并为止。

获得图像分割后的各类的最大最小坐标值 $x_i\text{Min}, x_i\text{Max}, y_i\text{Min}, y_i\text{Max}$ 之后,进行各类的精确区域重建:

For(视角从 0 到 M)

For(采样点从 0 到 N)

For(扫描线上的点从 0 到 N)

{

If( $x_i\text{Min}<x<x_i\text{Max}, y_i\text{Min}<y<y_i\text{Max}$ )

计算当前点( $x, y$ );

涂抹( $x, y$ );

}

得到精确投影之后,则可与前面获得的不完全数据投影相比照,可以方便进行进一步视觉上的判断。

## 4 仿真实验

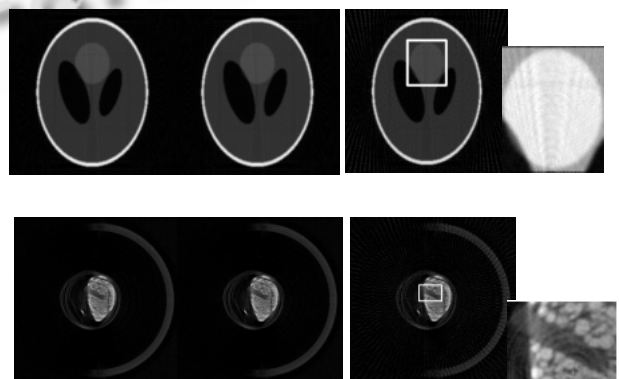


图6 重建图像

为了验证上述加速算法的快速性和有效性,下面分别采用模拟数据和实际采集数据对算法进行检验。模拟数据采用 Sheep-logan 人头断面为检验模型,

实际数据由 SkyScan1076 活体 Micro-CT 采集而来。试验中假定了需要检测的特定密度值进行检测,取得了比较好的效果。检测重建图像如图 6 所示,上一行为模拟数据重建,下一行为实际采集数据重建。第一列为 **FBP360** 角度重建,第二列为三角函数查找表法重建,第三列为 **120** 稀疏角度重建,方框内部分为标示出的感兴趣区域。第四列为局部精确重建。

表 1 重建所用时间(ms)

	模型数据重建时间	实际数据重建时间
FBP 算法	111766	547657
几何参数表法	30172	182844
本文算法	15016	84547

由图 6 可以看出,几何参数表法得到的图像与 **FBP** 算法没有区别,而初步重建图像的质量与精确重建相差不大,感兴趣区域仍然被很好重建了出来。而由表 1 的重建时间上可以看出,本文提出的快速 **FBP** 算法比原始 **FBP** 算法速度提高了约七倍,比查找表法的速度提高了约一倍,而且没有影响到对感兴趣区域的关注,在实际应用中有很大的价值。

### 参考文献

- 1 江根苗,连兵,刘晋军,等. CT 图像重建算法优化和代码优化. *CT 理论与应用研究*, 2000,9(9):13-22.
- 2 孙景鳌,蔡安妮,何拥军. CT 图像的快速算法. *北京邮电大学学报*, 1995,18(3):5-15.
- 3 张朝宗,郭志平,董宇峰,张和平. 用几何参数表方法实现快速重建 CT 图象. *清华大学学报*, 1998,38(7):47-49.
- 4 傅健,路宏年,张全红. 扇束工业 CT 重建算法速度优化. *CT 理论与应用研究*, 2002,11(3):16-19.
- 5 Hsieh. *Computed Tomography Principle, Design, Artifacts and Recent Advances*. Bellingham. SPIE PRESS, 2004. 28-29.
- 6 刘晓平. 扇束卷积反投影法的程序优化. *CT 理论与应用研究*, 1996,5(1):35-37.
- 7 Francisco J, Ubaldo M, Jose L, Jose M. Fast Image Recovery Using Dynamic Load Balancing in Parallel Architectures, by Means of Incomplete Projections.