

# 一种基于角度相关性的快速 FBP 算法

## A Fast FBP Based on Angle Correlation

郭琦<sup>1)</sup> 孔斌<sup>2)</sup> 郑飞<sup>3)</sup> 成二康<sup>4)</sup>

<sup>1)2)3)4)</sup> (中国科学院合肥智能机械研究所仿生实验室 合肥 230001)

<sup>1)4)</sup> (中国科学技术大学自动化系 合肥 230001)

<sup>1)2)3)4)</sup> (安徽省仿生感知与先进机器人技术重点实验室 合肥 230001)

**摘要:** 介绍了 X 射线投影重建的基本原理,对经典的平行束滤波反投影算法(FBP)进行了分析,并提出了一种基于平行束角度相关性的快速 FBP 算法(AC-FBP)。最后对该方法进行了实验,并将实验结果和传统 FBP 算法、几何参数表法做出主观、客观上的比较评价。结果表明,AC-FBP 算法不但能在很大程度上提高传统 FBP 算法的速度,而且在有效区域的重建质量上也有一定的提高。

**关键词:** X 射线 图像重建 滤波反投影 平行束 角度相关性

## 1 引言

从七十年代初开始,对通过重要出入口如机场、港口、车站、海关等的人员所携带的行李物品实施安全检查已成为国际上广泛采用的安全措施。在各种检查手段中,低成本、低剂量、非接触式可成像的 X 射线安全检查设备的应用最为普遍。它是一种利用 X 射线的穿透能力实现对行李货物进行快速不开箱检查的技术。

X 射线重建的理论基础是由奥地利数学家雷顿(Radon)于 1917 年在他的论文中提出的,文中证明了二维或三维物体能够通过其无限多个投影来精确确定。但限于当时技术条件,这一理论未能实现。到了 20 世纪 60 年代,随着科学技术的发展特别是计算机科学的发展,它才得到了广泛的研究与应用<sup>[1]</sup>。

由投影重建图像的数学计算方法大致可分为两类,一类为解析法,如傅立叶变换法、滤波反投影法(FBP)等;另一类为代数法,如代数迭代法、最大熵重建法等。目前,解析法已广泛应用于 CT 成像的算法中,其优点是重建速度快、图像效果好。解析法中,FBP 算法由于其精度高并能快速实现而被几乎所有的重建设备所采用。尽管滤波反投影算法与其它图像重建算法相比具有较高的运算效率,但计算量仍然很大<sup>[2]</sup>,因此,对 FBP 算法进行优化以提高算法的执行效率是非常必要的。

本文中提出了一种基于角度相关性的快速 FBP 算法,它从几个方向对反投影算法做出改进,并考虑到了

X 射线反投影时角度的相互联系,去除了冗余数据,实验证明该算法能将传统的 FBP 算法的速度成倍提高。

第一节中对投影重建的基本原理做出简单介绍,并对 FBP 算法进行简单说明。第二节中提出了基于平行束角度相关性的 FBP 快速实现方法。第三节中给出实验结果并和经典 FBP 算法以及几何参数表法进行对比和评价。最后一节进行总结。

## 2 投影重建的基本原理及经典 FBP 算法

### 2.1 投影重建的基本原理

投影重建之所以得以实现的基础是基于 Lambert-Beers 定律:

$$I = I_0 e^{-\mu \Delta x} \quad (1)$$

式中  $I_0$  是入射 X 射线强度,  $I$  是出射 X 射线强度,  $\Delta x$  是厚度,  $\mu$  是材料的线性衰减系数,通常  $\mu$  随着 X 射线的能量改变,并因所选材料的不同而不同<sup>[3]</sup>。

考虑一个非均匀的物体,如图一所示,在数学上,它可以表示如下:

$$(2)$$

如果等式两边除以  $I_0$ , 并取负自然对数值,可以得到:

$$(3)$$

上式说明,入射 X 射线与出射 X 射线强度之比经

过对数运算后,等于 X 射线路径上衰减系数的线积分。这也就是说,只要知道了 X 射线的入射、出射强度,就能够计算出 X 射线路径上衰减系数的线积分,这就给重建提供了依据。

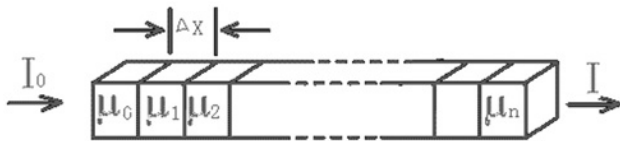


图 1 投影原理图

## 2.2 滤波反投影算法

FBP 算法是一种解析重建方法,它的基础是傅立叶切片理论,如图 2 所示:在某个方向上投影数据的傅立叶变换,等于该图像二维傅立叶变换在相同角度上的斜线。

基于傅立叶切片理论,只需要获取各个方面的投影数据的一维傅立叶变换,并将它们拼在一起得到整个图像的二维傅立叶变换,然后做二维傅立叶反变换就可以得到重建图像。但是由于傅立叶空间中产生的采样模式不是笛卡儿坐标的,所以投影采样是在极坐标栅格上,为了执行二维傅立叶反变换,这些采样不得不被栅格化到一个笛卡儿坐标系中,然而在频率域空间的差值会给重建图像造成漂移、伪影等干扰,所以直接的差值傅立叶变换是不可取的。

如图 3 所示,物体的二维傅立叶变换是由许多一维傅立叶变换拼接起来的。由于通过投影采样得到的一维傅立叶变换是长条状,所以拼接的过程必须加权,这个加权的過程就是加权滤波,而整个重建过程,一般称为滤波反投影。

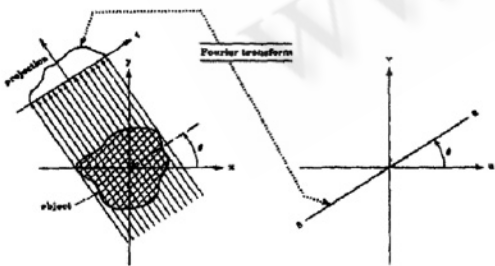


图 2 傅立叶切片理论

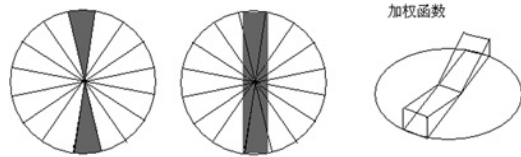


图 3 滤波反投影示意图

## 3 卷积反投影图像重建算法的快速实现

FBP 算法由投影加权、卷积滤波、加权反投影三部分组成。分析表明,这三部分的运算量分别占总运算量的 0.0016%、1.6%、98.36%<sup>[4]</sup>。因此,要提高 FBP 算法的运行速度,关键是设法提高加权反投影的运算速度。国内、外在这方面也进行了一些研究,提出了一些有效的加速反投影的方法,但反投影的计算仍有冗余。下面,本文将对反投影的算法流程做出分析,并对一些冗余的计算做出调整,使得 FBP 算法的全过程能更快速的执行。

### 3.1 离散图像反投影算法流程

在平行束 X 射线重建中,反投影算法的时间复杂度主要是由以下两个因素决定的: X 射线源扫描的视角数  $M$ 、一次采样点数  $N$ 。对于每次扫描的每一个采样点,反投影算法需要将滤波后的投影数据均匀涂抹在扫描线上,如下面的伪码所示,反投影算法的循环次数为  $M \times N \times N$ 。

```

For( 视角从 0 到 M )
For( 采样点从 0 到 N )
For( 扫描线上的点从 0 到 N )
{
    计算当前点( x, y );
    涂抹( x, y );
}

```

### 3.2 角度相关性及数据结构改造

通过对以上伪码的分析,要提高程序的速度可以从以下几个方面着手:

(1) 减少投影的角度,可减少第一层循环的次数,但是由于有效信息的缺失,图像的质量会有所下降。

(2) 减少采样数,可减少第二层循环的次数,但图像的质量同样有所下降。

(3) 基于角度相关性的采样点无效数据的剔除。在图四中可以看到,水平方向的投影是由红色的线段来表示,垂直方向的投影是由绿色的线段来表示,由于扫描宽度的选取是由被重建图像的最大长度决定的,所以必然会产生一定的冗余数据。

① 投影数据为 0 采样点的不需反投影。在图四中水平方向的反投影的范围可以选择 C1 到 C2,而不是 0 到 N,这样可减少第二层循环,并且不会造成信息缺失。

② 根据和当前投影方向成 90 度的投影数据判断需要反投影的范围,可减少扫描点的个数。在图四中的绿线和红线相垂直,可以看出在垂直扫描时 0 到 D1 和 D1 到 N 这两个区间内是没有数据的,也就是说在水平反投影时,不需要涂抹上述两个区间,这样可减少最里层循环的数量且能够加强反投影的能量,效果会更好。

(4) 由于角度关系,循环体内三角函数可重用,可减少循环体内计算时间<sup>[5]</sup>。

(5) 用空间换时间,将事先计算好的三角函数保存起来,需要时调用,可减少循环体内计算时间<sup>[6]</sup>。

传统的 FBP 算法采用图像做反投影数据的存储介质,本文中的算法由于要进行一些角度上的约束,所以采用结构体做为数据结构更合理。数据结构如下:

```
Struct AngleSample
{
    Float sample[ sampleNum ]; //采样数据
    Int left ; //有效区域左边界
    Int right ; //有效区域右边界
    Int up ; //反投影上边界
    Int down ; //反投影下边界
    Float sina ; //当前角度正弦
    Float cosa ; //当前角度余弦
}
AngleSample[ angleNum ]; //整个投影数据
```

### 3.3 算法改造

本着不降低重建图像质量并能达到更快重建速度的标准,本文从 3、4、5 三个方面着手,对反投影算法及数据结构进行改造。改造后的伪码如下:

```
计算各个视角的正余弦,并保存;
For( 视角从 0 到 M/2 ) //加速
{
    计算有效采样点的范围 C1 - C2 ;
    For( 采样点从 C1 到 C2 ) //加速
    {
        根据垂直方向的投影计算涂抹范围 D1 - D2 ;
        For( 扫描线上的点从 D1 到 D2 ) //加速
        { //加速
            计算当前点坐标 ( x , y ) (调用正余弦表);
            涂抹 ( x , y );
            涂抹 ( y , x );
        }
    }
}
```

## 4 仿真实验及客观评价

为了验证上述加速算法的快速性和有效性,下面采用 Sheep - logan 人头断面为检验模型。这个模型由 10 个位置、大小、衰减系数各异的椭圆组成,各椭圆特征如表 1 所示,断面如图 5 所示。

表 1 模型参数表

椭圆	X	Y	长轴	短轴	倾角	衰减
1	0	0	0.92	0.59	90	2.0
2	0	-0.0184	0.874	0.6624	90	-1.5
3	0.22	0	0.31	0.11	72	-0.4
4	-0.22	0	0.41	0.16	108	-0.4
5	0	0.35	0.25	0.21	90	0.3
6	0	0.1	0.046	0.046	0	0.3
7	0	-0.1	0.046	0.046	0	0.4
8	-0.08	-0.605	0.046	0.023	0	0.2
9	0	-0.605	0.023	0.023	0	0.2
10	0.06	-0.605	0.046	0.023	90	0.2

### 4.1 数据分析及主观评价

重建图像如图五所示,上一行是在角度步长为 1 度,256 个采样点的情况下重建的结果。下一行是在角度步长为 0.5 度,512 个采样点的情况下重建的结

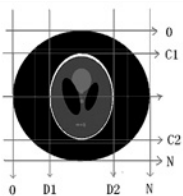


图 4 角度相关性示意图      图 5 模型截面图

果。第一列是投影数据,第二列是经典 FBP 和几何参数表法重建的结果,最后一列是 AC-FBP 重建的结果。可以看出几何参数表法和经典 FBP 算法重建的结果完全相同,而 AC-FBP 算法在模型的有效区域部分的效果要好于前两种算法。

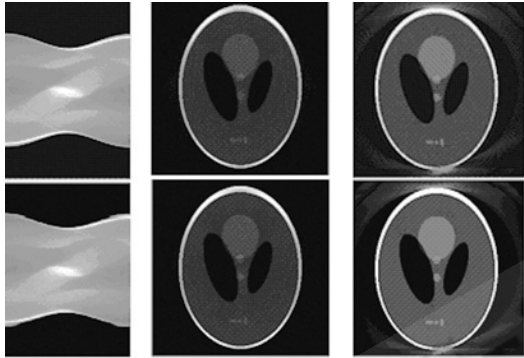


图 6 重建图像比较

表 2 重建所用时间( ms )

(重建一是在角度采样 180 个、采样点 256 个  
重建二是在角度采样 360 个、采样点 512 个)

	重建一	重建二
FBP	10703	44396
几何参数表法	8000	32125
AC-FBP	6015	24188

从表 2 的重建速度上可以看出,AC-FBP 和传统的 FBP 算法相比较速度提高了约一倍。而比起几何参数表法,AC-FBP 算法的速度约提高了三分之一。

#### 4.2 客观评价

为比较重建效果,定义几个评价指标,d 称为归一化均方距离判据,较敏感的反应某几点产生较大误差的情况,r 称为归一化平均绝对距离判据,对许多点均有一些小误差的情况比较敏感,e 是模型和重建图形的最大相对误差,aver\_e 是平均误差。这几个指标数值越小,表明重建图像的质量越好,重建图像与原始图像越接近<sup>[7]</sup>。

分别对重建一、二的结果做出评价,评价的结果如表三所示,可以看出,在 d、r、aver\_e 三个评价指标上 AC-FBP 算法更优,而在 e 评价标准上 AC-FBP 算法略次于经典算法,综合来看,AC-FBP 算法的重建效果更佳。

表 3 评价结果表

	d	r	e	aver_e
FBP (一)和几何参数表法(一)	0.605303	0.587086	0.682353	0.046450
AC-FBP(一)	0.558442	0.482450	0.705882	0.040961
FBP (二)和几何参数表法(二)	0.504059	0.512165	0.580392	0.042227
AC-FBP(二)	0.450582	0.410451	0.639216	0.036352

## 5 结论

实验证明,本文提出的 AC-FBP 算法对传统 FBP 算法在反投影上的改进不仅能够大大加快重建的速度,而且在重建图像的有效区域的质量上也有一定的改善。尤其在对长条形物体的重建时,由于冗余数据多,AC-FBP 的算法性能能够得到更大的体现。改善的原因主要来自于三个方面:对无效数据的剔除;角度间相关性约束;用空间来换取时间的算法。这种基于平行束的加速重建方法如何引入扇束、锥束重建,将是后续研究的方向。

## 参考文献

- 王培,郑兆瑞,郝记秀.有序表改进扇束滤波反投影重建算法求解速度的研究.太原理工大学学报,2005,36(2):203-206.
- 傅健,路宏年,张全红.扇束工业 CT 重建算法速度优化. CT 理论与应用研究,2002,11(3):16-19.
- Hsieh. Computed Tomography Principle, Design, Artifacts and Recent Advances. 1th ed. Bellingham. SPIE PRESS, 2004. 28-29.
- 李志鹏,丛鹏,邬海峰.代数迭代算法进行 CT 图像重建的研究.核电子学与探测技术,2005,25(2):184-186.
- Francisco J, Ubaldo M, Jose L, Jose M. Fast Image Recovery Using Dynamic Load Balancing in Parallel Architectures, by Means of Incomplete Projections. Image Processing, 2001, 10(4):493-498.
- 张朝宗,郭志平,董宇峰,张和平.用几何参数表方法实现快速重建 CT 图像.清华大学学报,1998,38(7):47-49.
- 刘晓平.扇束卷积反投影法的程序优化. CT 理论与应用研究,1996,5(1):35-37.